· U C ·

Universidade de Coimbra

FCTUC

Séries Temporais

Modelação e Previsão de uma Série Temporal

João Marcelino
João Nuno Freitas
José Pedro Lopes
Simão Pedro Coelho

Janeiro 2020

Introdução

Este projeto, proposto pela unidade curricular de Séries Temporais, tem por base a geração e modelação estocástica de uma série temporal e uma posterior modelação e previsão de uma série real que, neste caso particular, é representada pelas cotações de fecho diárias da RAMADA, retirada do índice PSI20, no período temporal de 17-9-2018 a 14-9-2020.
A empresa RAMADA tem 80 anos de existência no ramo do aço. Entrou em 2018 para o leque das empresas existentes no PSI20, em substituição da Novabase. A RAMADA é composta, por oito empresas, das quais três são sedeadas em países da União Europeia.

1 Geração de uma Série Temporal

Neste capítulo pretende-se gerar e analisar uma série temporal $X = (X_t, t \in \{1, 2, ..., T\})$ que verifique um processo estocástico estacionário ARMA (p, q) com erros TGARCH (r, s) de potência δ.
Depois de uma escolha conveniente e justificada dos parâmetros, obtém-se a seguinte série:

$$X_t = \frac{5}{6}X_{t-1} - \frac{1}{6}X_{t-2} + \varepsilon_t \,.$$

Ou seja, tem-se uma série que verifica um processo AR(2). Facilmente se verifica que este processo é estacionário, pois as raízes do polinómio AR estão fora do circulo unitário. De facto, sendo o polinómio autoregressivo dado por

$$\Phi(L) = 1 - \frac{5}{6}L + \frac{1}{6}L^2 \,,$$

tem-se que

$$\Phi(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3 \,.$$

Por fim, note-se que $\varepsilon = (\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ é um ruído branco de variância não nula.

No que diz respeito ao processo dos erros, foi escolhido trabalhar com um modelo GARCH (1, 1). Assim sendo, o processo $\varepsilon = (\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ é definido por:

$$\begin{cases} \varepsilon_t = \sigma_t Z_t \\ \sigma_t = 3 + 0.45\varepsilon_{t-1}^{+} + 0.2\varepsilon_{t-1}^{-} \end{cases}$$

onde $\varepsilon_t^+ = \max(\varepsilon_t, 0)$ e $\varepsilon_t^- = \max(-\varepsilon_t, 0)$, com $Z = (Z_t, t \in \mathbb{Z})$ uma sucessão de variáveis aleatórias i.i.d., centradas e reduzidas, tal que Z_t é independente de $\underline{\varepsilon}_{t-1}$ para todo o $t \in \mathbb{Z}$ e com $\alpha = 0.45$ e $\beta = 0.2$ constantes reais.
Desta forma, verifica-se que o erro do processo é um GARCH (1, 1) a partir da seguinte forma:

$$\forall t \in \mathbb{Z}, V(\varepsilon_t | \underline{\varepsilon}_{t-1}) = h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-1}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j h_{t-j} \,.$$

Esta representação permite estudar a estacionaridade de 2ª ordem, onde o modelo é assintoticamente estacionário no sentido fraco se os parâmetros são tais que:

$$\sum_{i=1}^{q} \alpha_i + \sum_{j=1}^{p} \beta_j < 1 \Leftrightarrow 0.45 + 0.2 < 1\,. \tag{1}$$

A condição inerente à equação (1) é condição necessária para a estacionaridade do processo de erro, neste caso, GARCH (1, 1).

1.1 Simulação da Série Temporal Z

Para analisar a série Z, que segue uma lei normal *standard*, começámos por gerar 1000 valores, no *EViews*, e obtivémos os seguintes resultados, figuras 1 e 2.

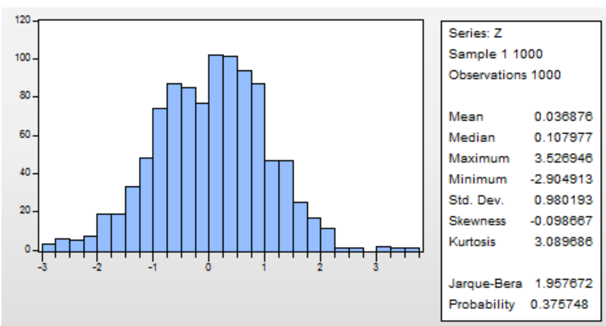


Figura 1: Histograma e resultado do teste de Jarque-Bera de Z

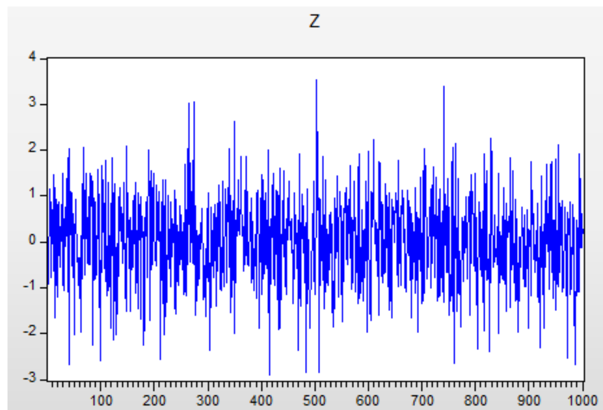


Figura 2: Trajetória da série Z

Da trajetória desta série observamos que existe um comportamento estável ao longo do tempo, isto é, não existem picos de grande volatilidade instantânea, mais ainda, conseguimos, de certa forma, enquadrar o seu gráfico entre duas retas.
O teste de Jarque-Bera testa duas hipóteses, a hipótese nula H_0: "Z segue uma lei normal", contra a hipótese alternativa H_1: "Z não segue uma lei normal". O p-valor associado a este teste encontra-se apresentado na figura 1 e vemos que o seu valor é 0.375748, superior aos níveis de significância usuais, logo aceita-se a normalidade.
Mais, os valores da média ($0.0368 \approx 0$), do desvio padrão ($0.980193 \approx 1$) e da curtose ($3.089 \approx 3$), reforçam que, de facto, a série Z segue uma lei normal centrada e reduzida.

1.2 Simulação da Série Temporal X

Tendo por base um processo X AR(2), teoricamente sabemos que a sucessão das autocorrelações parciais de X anula-se a partir da ordem 3. De facto, observando o correlograma de X, ver figura 5, vemos que apenas os dois primeiros valores são significativos, estando os restantes valores próximos de 0, como seria de esperar. Também é possível verificar que a

sua função autocorrelação decresce exponencialmente.
Na figura 3 verifica-se que o p-valor do teste de Jarque-Bera é nulo, o que nos leva a rejeitar a hipótese de normalidade de X e verifica-se também uma trajetória estável ao longo do tempo.

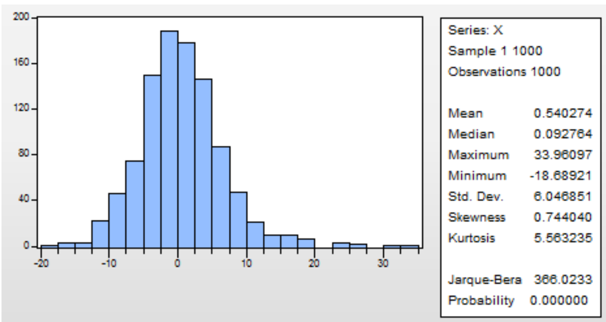


Figura 3: Histograma da série X

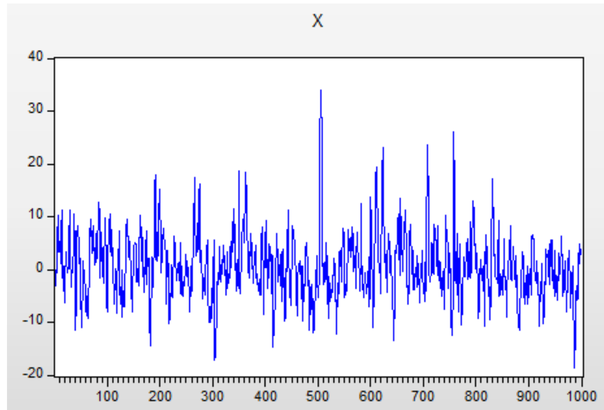
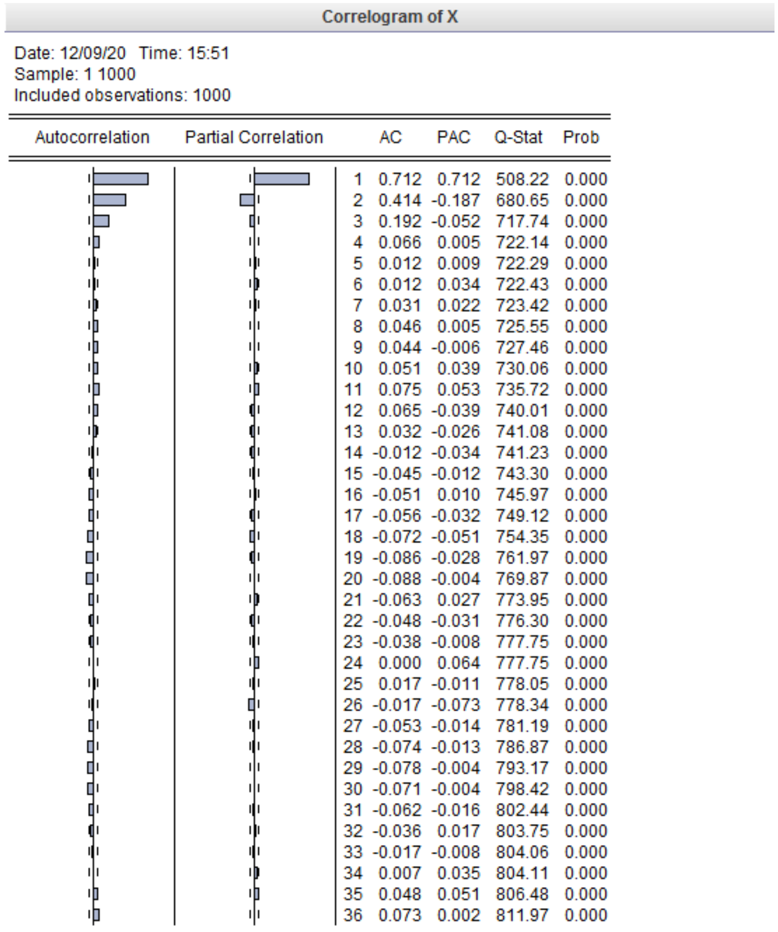


Figura 4: Trajetória da série X



Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.712	0.712	508.22	0.000
		2	0.414	-0.187	680.65	0.000
		3	0.192	-0.052	717.74	0.000
		4	0.066	0.005	722.14	0.000
		5	0.012	0.009	722.29	0.000
		6	0.012	0.034	722.43	0.000
		7	0.031	0.022	723.42	0.000
		8	0.046	0.005	725.55	0.000
		9	0.044	-0.006	727.46	0.000
		10	0.051	0.039	730.06	0.000
		11	0.075	0.053	735.72	0.000
		12	0.065	-0.039	740.01	0.000
		13	0.032	-0.026	741.08	0.000
		14	-0.012	-0.034	741.23	0.000
		15	-0.045	-0.012	743.30	0.000
		16	-0.051	0.010	745.97	0.000
		17	-0.056	-0.032	749.12	0.000
		18	-0.072	-0.051	754.35	0.000
		19	-0.086	-0.028	761.97	0.000
		20	-0.088	-0.004	769.87	0.000
		21	-0.063	0.027	773.95	0.000
		22	-0.048	-0.031	776.30	0.000
		23	-0.038	-0.008	777.75	0.000
		24	0.000	0.064	777.75	0.000
		25	0.017	-0.011	778.05	0.000
		26	-0.017	-0.073	778.34	0.000
		27	-0.053	-0.014	781.19	0.000
		28	-0.074	-0.013	786.87	0.000
		29	-0.078	-0.004	793.17	0.000
		30	-0.071	-0.004	798.42	0.000
		31	-0.062	-0.016	802.44	0.000
		32	-0.036	0.017	803.75	0.000
		33	-0.017	-0.008	804.06	0.000
		34	0.007	0.035	804.11	0.000
		35	0.048	0.051	806.48	0.000
		36	0.073	0.002	811.97	0.000

Figura 5: Correlograma da série X

1.3 Simulação do Processo $\varepsilon = (\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$

As estatísticas apresentadas do processo ε eram as esperadas, ou seja, um processo de erro com característícas muito próximas de um ruído branco. A função de autocorrelação é nula, assim como a sucessão das autocorrelações parciais. No histograma vemos que o valor da média é 0.179816, próxima de zero, mas podia ser um valor mais próximo. O teste de Jarque-Bera diz-nos que este processo não segue uma lei normal, mas tal também não era esperado, pois não é uma condição necessária.

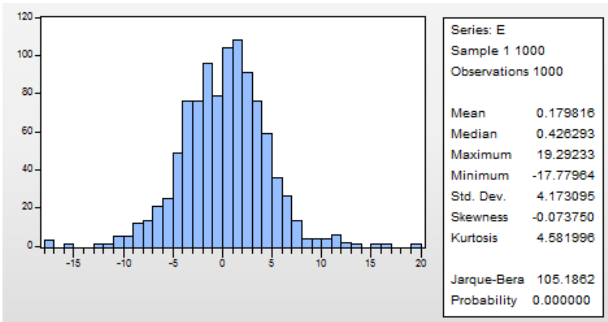


Figura 6: Histograma do processo ε

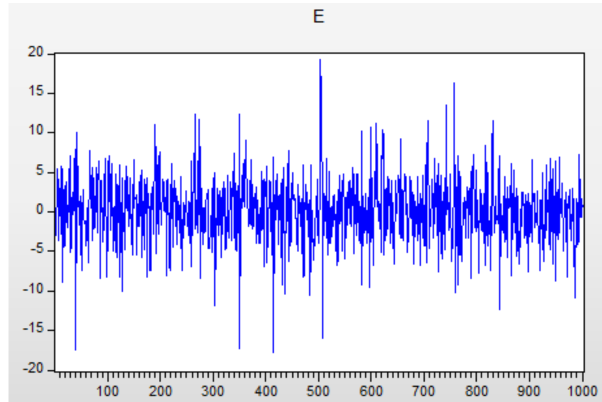


Figura 7: Trajetória do processo ε

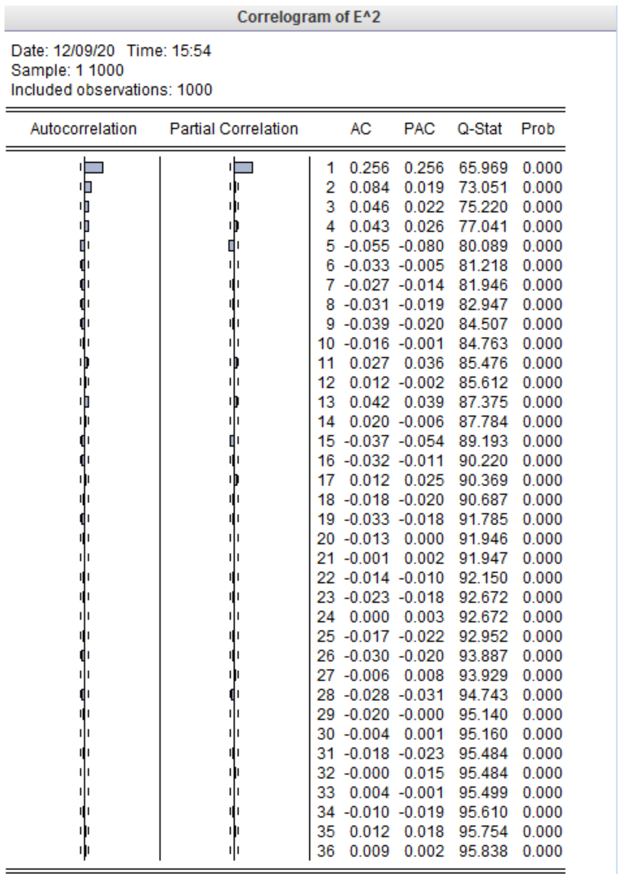
Correlogram of E

Date: 12/09/20 Time: 15:53
Sample: 1 1000
Included observations: 1000

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.003	0.003	0.0116	0.914
		2	0.026	0.026	0.6933	0.707
		3	-0.033	-0.034	1.8137	0.612
		4	-0.029	-0.029	2.6505	0.618
		5	-0.036	-0.034	3.9788	0.552
		6	-0.008	-0.007	4.0426	0.671
		7	0.016	0.016	4.3122	0.743
		8	0.034	0.031	5.4650	0.707
		9	-0.002	-0.005	5.4686	0.792
		10	-0.020	-0.023	5.8764	0.826
		11	0.060	0.063	9.5618	0.570
		12	0.029	0.033	10.443	0.577
		13	0.021	0.019	10.892	0.620
		14	-0.015	-0.014	11.125	0.676
		15	-0.042	-0.040	12.879	0.612
		16	-0.009	-0.002	12.961	0.676
		17	0.003	0.010	12.973	0.738
		18	-0.018	-0.020	13.297	0.774
		19	-0.029	-0.038	14.136	0.776
		20	-0.054	-0.060	17.130	0.645
		21	0.005	0.007	17.158	0.702
		22	0.002	0.003	17.161	0.754
		23	-0.055	-0.063	20.223	0.628
		24	0.019	0.009	20.591	0.663
		25	0.065	0.065	24.988	0.463
		26	-0.015	-0.012	25.222	0.506
		27	-0.026	-0.024	25.923	0.523
		28	-0.032	-0.027	26.960	0.520
		29	-0.025	-0.023	27.627	0.538
		30	-0.010	-0.003	27.738	0.584
		31	-0.040	-0.030	29.411	0.548
		32	0.011	0.005	29.530	0.592
		33	-0.009	-0.019	29.606	0.637
		34	-0.024	-0.025	30.206	0.654
		35	0.024	0.027	30.813	0.671
		36	0.062	0.058	34.801	0.526

Figura 8: Correlograma do processo ε

De seguida, analisámos também o processo do erro quadrático, ε^2 e, através do seu correlograma, verificámos que a sua sucessão das autocorrelações parcias se anula a partir da ordem 2 e que a função de autocorrelação tem um decrescimento rápido. Isto levou-nos a concluir que este processo é compatível com um AR(1).



Correlogram of E^2

Date: 12/09/20 Time: 15:54
Sample: 1 1000
Included observations: 1000

	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.256	0.256	65.969	0.000
2	0.084	0.019	73.051	0.000
3	0.046	0.022	75.220	0.000
4	0.043	0.026	77.041	0.000
5	-0.055	-0.080	80.089	0.000
6	-0.033	-0.005	81.218	0.000
7	-0.027	-0.014	81.946	0.000
8	-0.031	-0.019	82.947	0.000
9	-0.039	-0.020	84.507	0.000
10	-0.016	-0.001	84.763	0.000
11	0.027	0.036	85.476	0.000
12	0.012	-0.002	85.612	0.000
13	0.042	0.039	87.375	0.000
14	0.020	-0.006	87.784	0.000
15	-0.037	-0.054	89.193	0.000
16	-0.032	-0.011	90.220	0.000
17	0.012	0.025	90.369	0.000
18	-0.018	-0.020	90.687	0.000
19	-0.033	-0.018	91.785	0.000
20	-0.013	0.000	91.946	0.000
21	-0.001	0.002	91.947	0.000
22	-0.014	-0.010	92.150	0.000
23	-0.023	-0.018	92.672	0.000
24	0.000	0.003	92.672	0.000
25	-0.017	-0.022	92.952	0.000
26	-0.030	-0.020	93.887	0.000
27	-0.006	0.008	93.929	0.000
28	-0.028	-0.031	94.743	0.000
29	-0.020	-0.000	95.140	0.000
30	-0.004	0.001	95.160	0.000
31	-0.018	-0.023	95.484	0.000
32	-0.000	0.015	95.484	0.000
33	0.004	-0.001	95.499	0.000
34	-0.010	-0.019	95.610	0.000
35	0.012	0.018	95.754	0.000
36	0.009	0.002	95.838	0.000

Figura 9: Correlograma de ε^2

Concluida esta análise, considerámos importante analisar o comportamento da nossa série X quando a sua estacionariadade é ameaçada, isto é, quando o seu polinónimo AR tem as raízes próximas de 1.

Por exemplo, ao considerar o polinómio AR da forma

$$\Phi(L) = (L - \frac{101}{100})(L - \frac{100}{101}),$$

onde as suas raízes são, aproximadamente, 1.01 e 0.99, obtivémos os seguintes resultados. Ver figuras 10, 11 e 12.

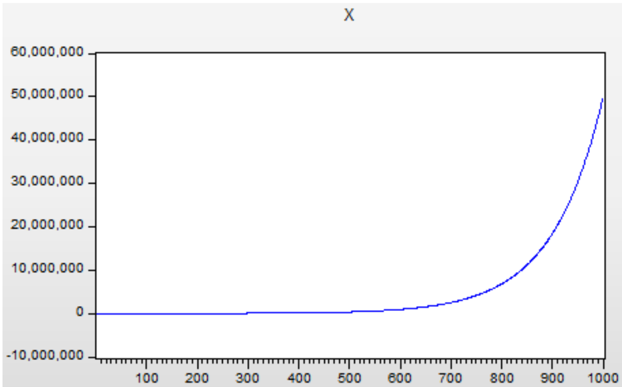


Figura 10: Trajetória de X novo

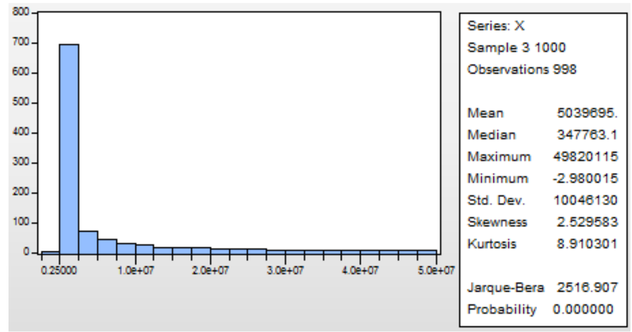
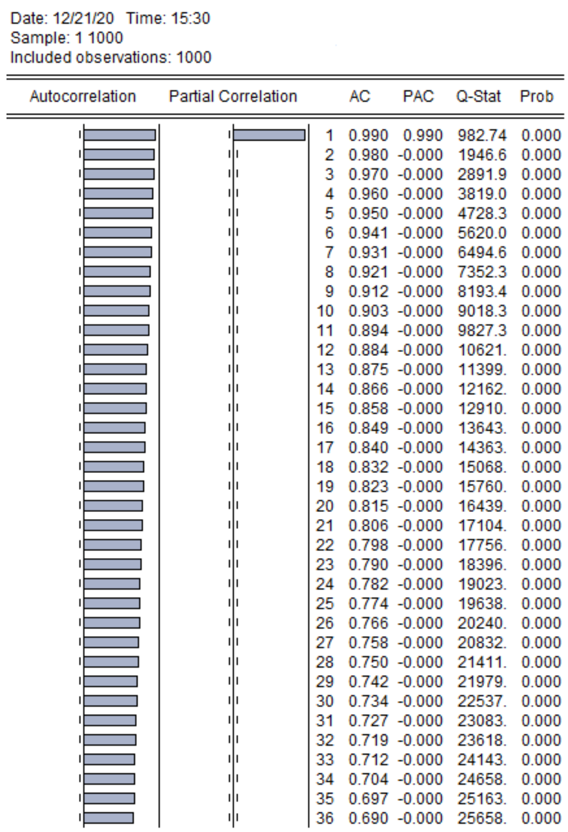


Figura 11: Histograma de X novo



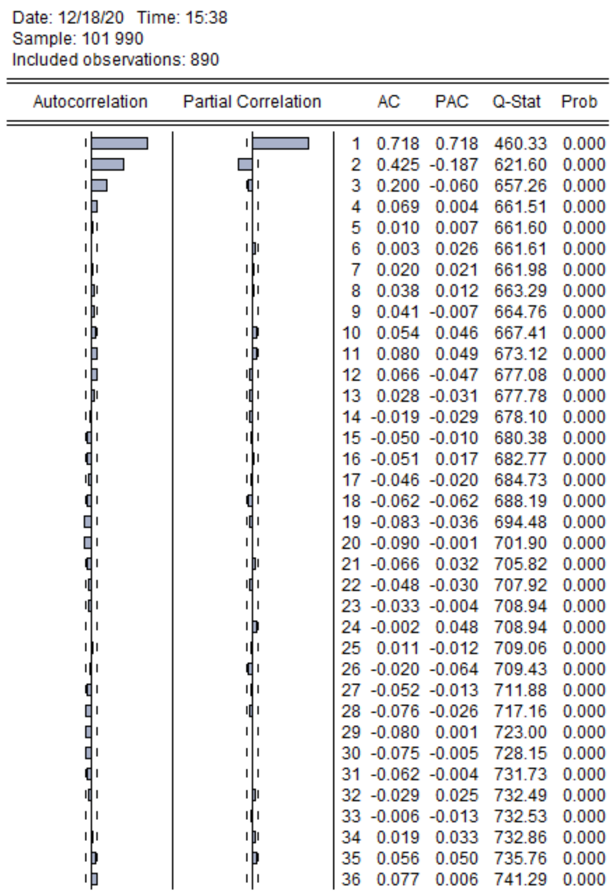
	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.990	0.990	982.74	0.000
2	0.980	-0.000	1946.6	0.000
3	0.970	-0.000	2891.9	0.000
4	0.960	-0.000	3819.0	0.000
5	0.950	-0.000	4728.3	0.000
6	0.941	-0.000	5620.0	0.000
7	0.931	-0.000	6494.6	0.000
8	0.921	-0.000	7352.3	0.000
9	0.912	-0.000	8193.4	0.000
10	0.903	-0.000	9018.3	0.000
11	0.894	-0.000	9827.3	0.000
12	0.884	-0.000	10621.	0.000
13	0.875	-0.000	11399.	0.000
14	0.866	-0.000	12162.	0.000
15	0.858	-0.000	12910.	0.000
16	0.849	-0.000	13643.	0.000
17	0.840	-0.000	14363.	0.000
18	0.832	-0.000	15068.	0.000
19	0.823	-0.000	15760.	0.000
20	0.815	-0.000	16439.	0.000
21	0.806	-0.000	17104.	0.000
22	0.798	-0.000	17756.	0.000
23	0.790	-0.000	18396.	0.000
24	0.782	-0.000	19023.	0.000
25	0.774	-0.000	19638.	0.000
26	0.766	-0.000	20240.	0.000
27	0.758	-0.000	20832.	0.000
28	0.750	-0.000	21411.	0.000
29	0.742	-0.000	21979.	0.000
30	0.734	-0.000	22537.	0.000
31	0.727	-0.000	23083.	0.000
32	0.719	-0.000	23618.	0.000
33	0.712	-0.000	24143.	0.000
34	0.704	-0.000	24658.	0.000
35	0.697	-0.000	25163.	0.000
36	0.690	-0.000	25658.	0.000

Figura 12: Correlograma de X novo

Como se pode ver na figura 10 a nova trajetória de X não apresenta um comportamento estável ao longo do tempo, tendendo para valores infinitamente grandes. Mais, na função de autocorrelação podemos verificar que não há um decrescimento exponencial.
Claro que um processo nestas condições não tem qualquer interesse para o nosso estudo, daí a importância das condições que garantem a estacionaridade do processo.

2 Análise de uma subsérie de X

Seguidamente fomos fazer o estudo de uma subsérie da nossa série X gerada na secção anterior. Para isso, considerámos estudar uma subsérie com 890 observações e são estas observações que vamos ajustar ao nosso modelo.
Depois de gerar a subsérie, analisámos o seu correlograma e, como se pode ver na figura 13, a sucessão das autocorrelações parciais anula-se a partir da ordem 3 e a correspondente função de autocorrelação decresce exponencialmente. Portanto, não se verifica qualquer alteração, ou seja, continuamos a ter características de um processo AR(2).



Date: 12/18/20 Time: 15:38
Sample: 101 990
Included observations: 890

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.718	0.718	460.33	0.000
		2	0.425	-0.187	621.60	0.000
		3	0.200	-0.060	657.26	0.000
		4	0.069	0.004	661.51	0.000
		5	0.010	0.007	661.60	0.000
		6	0.003	0.026	661.61	0.000
		7	0.020	0.021	661.98	0.000
		8	0.038	0.012	663.29	0.000
		9	0.041	-0.007	664.76	0.000
		10	0.054	0.046	667.41	0.000
		11	0.080	0.049	673.12	0.000
		12	0.066	-0.047	677.08	0.000
		13	0.028	-0.031	677.78	0.000
		14	-0.019	-0.029	678.10	0.000
		15	-0.050	-0.010	680.38	0.000
		16	-0.051	0.017	682.77	0.000
		17	-0.046	-0.020	684.73	0.000
		18	-0.062	-0.062	688.19	0.000
		19	-0.083	-0.036	694.48	0.000
		20	-0.090	-0.001	701.90	0.000
		21	-0.066	0.032	705.82	0.000
		22	-0.048	-0.030	707.92	0.000
		23	-0.033	-0.004	708.94	0.000
		24	-0.002	0.048	708.94	0.000
		25	0.011	-0.012	709.06	0.000
		26	-0.020	-0.064	709.43	0.000
		27	-0.052	-0.013	711.88	0.000
		28	-0.076	-0.026	717.16	0.000
		29	-0.080	0.001	723.00	0.000
		30	-0.075	-0.005	728.15	0.000
		31	-0.062	-0.004	731.73	0.000
		32	-0.029	0.025	732.49	0.000
		33	-0.006	-0.013	732.53	0.000
		34	0.019	0.033	732.86	0.000
		35	0.056	0.050	735.76	0.000
		36	0.077	0.006	741.29	0.000

Figura 13: Correlograma da subsérie X

De seguida, procedemos à estimação da nossa série temporal X, gerada por um AR(2), com base nesta subsérie de 890 observações, através do método dos mínimos quadrados. Os resultados desse método estão ilustrados na figura 14.

Dependent Variable: X1
Method: ARMA Maximum Likelihood (OPG - BHHH)
Date: 12/18/20 Time: 18:37
Sample: 101 990
Included observations: 890
Convergence achieved after 17 iterations
Coefficient covariance computed using outer product of gradients

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.390397	0.446725	0.873907	0.3824
AR(1)	0.855665	0.025048	34.16104	0.0000
AR(2)	-0.189851	0.027603	-6.878036	0.0000
SIGMASQ	17.45641	0.634549	27.50994	0.0000

R-squared	0.534222	Mean dependent var	0.412748
Adjusted R-squared	0.532644	S.D. dependent var	6.125364
S.E. of regression	4.187508	Akaike info criterion	5.707474
Sum squared resid	15536.21	Schwarz criterion	5.729007
Log likelihood	-2535.826	Hannan-Quinn criter.	5.715704
F-statistic	338.7306	Durbin-Watson stat	2.024860
Prob(F-statistic)	0.000000		

Inverted AR Roots	.43+.08i	.43-.08i

Figura 14: Teste de ajustamento

Como se pode verificar o modelo estimado está bem ajustado ao modelo inicial.
O primeiro p-valor apresentado, relativamente à variável C, é 0.3824, superior aos níveis de significância usuais, logo permite-nos verificar que, de facto, o nosso processo é centrado, pois foram testadas as hipóteses H_0 : "C $= 0$" contra H_1 : "C $\neq 0$". O segundo p-valor é relativo ao teste H_0 : "$\varphi_1 = 0$" contra H_1 : "$\varphi_1 \neq 0$" e sendo nulo, aceitamos H_1 porque, como sabemos, considerámos $\varphi_1 = \frac{5}{6}$ e o valor apresentado é $0.855665 \approx \frac{5}{6}$. De forma análoga se tira as mesmas conclusões para o teste efectuado ao coeficiente $\varphi_2 = -\frac{1}{6}$.
Depois analisámos o correlograma dos resíduos da estimação desta subsérie e, novamente, nada se alterou, porque os resultados apresentados na figura 16 mostram-nos que estamos perante um correlograma compatível com um ruído branco. Mais, também o correlograma do quadrado dos resíduos se mantém compatível com um AR(1), pois a sucessão das autocorrelações parciais anula-se a partir da ordem 2 e a função de autocorrelação decresce rapidamente.
De forma a termos uma melhor comparação relativamente à subsérie gerada, analisámos também o seu gráfico da trajectória e, como seria esperado, mantém-se muito semelhante ao AR(2) inicial, pois a subsérie gerada tem apenas menos 110 observações.
Posteriormente analisámos o correlograma dos resíduos e, como se pode ver na figura 16, temos características de um ruído branco. No entanto, pela a análise do correlograma do quadrado dos resíduos vemos que este não é compatível com um ruído branco, pois há dependência de primeira ordem, ou seja, a dependência do quadrado do resíduo é compatível com um modelo AR(1), figura 17.
Isto levou-nos a analisar a heteroscedasticidade dos erros e o teste efectuado encontra-se na figura 15. Neste teste são testadas as hipóteses H_0 : "Ausência de heteroscedasticidade" contra H_1 : "Presença de heteroscedasticidade".
Como o p-valor deste teste é identicamente nulo, então rejeitamos a hipótese nula e portanto concluímos que o nosso modelo ainda não é o mais adequado.

Heteroskedasticity Test: ARCH

F-statistic	62.12134	Prob. F(1,887)	0.0000
Obs*R-squared	58.18631	Prob. Chi-Square(1)	0.0000

Test Equation:
Dependent Variable: RESID^2
Method: Least Squares
Date: 01/18/21 Time: 10:26
Sample (adjusted): 102 990
Included observations: 889 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	12.96966	1.201929	10.79070	0.0000
RESID^2(-1)	0.255838	0.032460	7.881709	0.0000

R-squared	0.065451	Mean dependent var	17.44011
Adjusted R-squared	0.064398	S.D. dependent var	32.66485
S.E. of regression	31.59558	Akaike info criterion	9.746159
Sum squared resid	885475.0	Schwarz criterion	9.756935
Log likelihood	-4330.168	Hannan-Quinn criter.	9.750278
F-statistic	62.12134	Durbin-Watson stat	1.995610
Prob(F-statistic)	0.000000		

Figura 15: Heteroscedasticidade dos erros AR(2)

Correlogram of Residuals

Date: 12/21/20 Time: 16:06
Sample: 101 990
Included observations: 890
Q-statistic probabilities adjusted for 2 ARMA terms

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	-0.014	-0.014	0.1635	
		2	0.044	0.044	1.8818	
		3	-0.025	-0.024	2.4406	0.118
		4	-0.021	-0.023	2.8198	0.244
		5	-0.029	-0.027	3.5680	0.312
		6	-0.010	-0.010	3.6624	0.454
		7	0.007	0.008	3.7028	0.593
		8	0.036	0.036	4.8965	0.557
		9	-0.008	-0.009	4.9504	0.666
		10	-0.015	-0.019	5.1438	0.742
		11	0.067	0.069	9.1887	0.420
		12	0.031	0.036	10.068	0.435
		13	0.013	0.009	10.225	0.510
		14	-0.015	-0.015	10.425	0.579
		15	-0.047	-0.046	12.395	0.496
		16	-0.016	-0.011	12.614	0.557
		17	0.015	0.023	12.817	0.616
		18	-0.009	-0.008	12.884	0.681
		19	-0.028	-0.040	13.623	0.694
		20	-0.062	-0.067	17.090	0.517
		21	0.006	0.008	17.119	0.582
		22	-0.001	0.003	17.120	0.645
		23	-0.043	-0.049	18.814	0.597
		24	0.015	0.005	19.023	0.644
		25	0.055	0.054	21.754	0.535
		26	-0.018	-0.012	22.046	0.576
		27	-0.016	-0.013	22.271	0.620
		28	-0.039	-0.035	23.658	0.595
		29	-0.021	-0.024	24.057	0.627
		30	-0.016	-0.010	24.286	0.666
		31	-0.046	-0.033	26.270	0.611
		32	0.019	0.018	26.602	0.644
		33	-0.006	-0.012	26.635	0.690
		34	-0.017	-0.021	26.888	0.723
		35	0.024	0.022	27.429	0.741
		36	0.065	0.063	31.343	0.598

Figura 16: Correlograma dos resíduos da estimação

Correlogram of Residuals Squared

Date: 12/21/20 Time: 16:07
Sample: 101 990
Included observations: 890

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.256	0.256	58.421	0.000
		2	0.057	-0.009	61.352	0.000
		3	0.040	0.029	62.777	0.000
		4	0.052	0.038	65.228	0.000
		5	-0.046	-0.075	67.155	0.000
		6	-0.021	0.008	67.535	0.000
		7	-0.020	-0.018	67.898	0.000
		8	-0.026	-0.018	68.501	0.000
		9	-0.045	-0.029	70.340	0.000
		10	-0.022	-0.005	70.786	0.000
		11	0.013	0.024	70.934	0.000
		12	0.022	0.016	71.364	0.000
		13	0.050	0.045	73.611	0.000
		14	0.034	0.006	74.664	0.000
		15	-0.032	-0.053	75.578	0.000
		16	-0.032	-0.016	76.509	0.000
		17	0.024	0.036	77.051	0.000
		18	0.004	-0.007	77.064	0.000
		19	-0.033	-0.027	78.082	0.000
		20	-0.007	0.009	78.129	0.000
		21	0.007	0.005	78.169	0.000
		22	-0.014	-0.010	78.343	0.000
		23	-0.026	-0.017	78.965	0.000
		24	-0.000	0.003	78.965	0.000
		25	-0.038	-0.048	80.314	0.000
		26	-0.029	-0.006	81.063	0.000
		27	-0.022	-0.010	81.501	0.000
		28	-0.026	-0.020	82.133	0.000
		29	-0.020	0.000	82.503	0.000
		30	-0.004	-0.003	82.522	0.000
		31	-0.012	-0.016	82.660	0.000
		32	-0.003	0.006	82.670	0.000
		33	0.003	0.003	82.676	0.000
		34	-0.003	-0.013	82.685	0.000
		35	0.008	0.008	82.740	0.000
		36	0.011	0.010	82.845	0.000

Figura 17: Correlograma do quadrado dos resíduos

De seguida, procedemos à estimação do nosso modelo por um processo AR-GARCH com base numa subsérie com 890 observações.

Dependent Variable: X1
Method: ML ARCH - Normal distribution (BFGS / Marquardt steps)
Date: 12/18/20 Time: 18:47
Sample (adjusted): 103 990
Included observations: 888 after adjustments
Convergence achieved after 30 iterations
Coefficient covariance computed using outer product of gradients
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
GARCH = C(4) + C(5)*RESID(-1)^2 + C(6)*GARCH(-1)

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	-0.336416	0.333837	-1.007725	0.3136
AR(1)	0.805827	0.036060	22.34716	0.0000
AR(2)	-0.158756	0.033354	-4.759702	0.0000
		Variance Equation		
C	9.759638	1.083929	9.003944	0.0000
RESID(-1)^2	0.473656	0.062977	7.521141	0.0000
GARCH(-1)	0.012442	0.047716	0.260743	0.7943

R-squared	0.532180	Mean dependent var	0.421965
Adjusted R-squared	0.531122	S.D. dependent var	6.125911
S.E. of regression	4.194696	Akaike info criterion	5.599053
Sum squared resid	15571.99	Schwarz criterion	5.631411
Log likelihood	-2479.980	Hannan-Quinn criter.	5.611422
Durbin-Watson stat	1.912306		

Inverted AR Roots	.46	.34

Figura 18: Teste de ajustamento

Análogamente ao teste de ajustamento feito anteriormente, podemos observar na figura 18 que primeiro p-valor apresentado, relativamente à variável C, é 0.3136, superior aos níveis de significância usuais, logo permite-nos verificar que a subsérie tem por base um processo centrado, pois foram testadas as hipóteses H_0 : "C = 0" contra H_1 : "C $\neq$ 0".
O segundo p-valor é relativo ao teste H_0 : "$\varphi_1 = 0$" contra H_1 : "$\varphi_1 \neq 0$" e sendo nulo, aceitamos H_1 porque, como sabemos, considerámos $\varphi_1 = \frac{5}{6}$ e o valor apresentado é $0.805827 \approx \frac{5}{6}$.
De forma análoga se tira as mesmas conclusões para o teste efectuado ao coeficiente $\varphi_2 = -\frac{1}{6}$.
Depois analisámos novamente o correlograma dos resíduos da estimação desta subsérie e agora podemos verificar que deixa de existir dependência de segunda ordem no correlograma do quadrado dos resíduos, tendo assim correlogramas compatíveis com ruídos brancos. Vejam-se as figuras 20 e 21 e o teste de heteroscedasticidade apresentado na figura 19, que nos garante a ausência de heteroscedasticidade nos erros, pois o p-valor é 0.7231, superior a qualquer nível de significância usual.

Heteroskedasticity Test: ARCH

F-statistic	0.125640	Prob. F(1,885)	0.7231
Obs*R-squared	0.125906	Prob. Chi-Square(1)	0.7227

Test Equation:
Dependent Variable: WGT_RESID^2
Method: Least Squares
Date: 01/18/21 Time: 10:30
Sample (adjusted): 104 990
Included observations: 887 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	1.010268	0.059926	16.85846	0.0000
WGT_RESID^2(-1)	-0.011909	0.033598	-0.354458	0.7231

R-squared	0.000142	Mean dependent var	0.998347
Adjusted R-squared	-0.000988	S.D. dependent var	1.476512
S.E. of regression	1.477242	Akaike info criterion	3.620482
Sum squared resid	1931.285	Schwarz criterion	3.631278
Log likelihood	-1603.684	Hannan-Quinn criter.	3.624609
F-statistic	0.125640	Durbin-Watson stat	1.998200
Prob(F-statistic)	0.723080		

Figura 19: Heteroscedasticidade dos erros AR-GARCH

Correlogram of Standardized Residuals

Date: 12/21/20 Time: 16:04
Sample: 101 990
Included observations: 888
Q-statistic probabilities adjusted for 2 ARMA terms

	AC	PAC	Q-Stat	Prob*
1	0.006	0.006	0.0310	
2	0.047	0.047	1.9785	
3	-0.030	-0.030	2.7687	0.096
4	-0.021	-0.023	3.1650	0.205
5	-0.037	-0.034	4.3585	0.225
6	0.004	0.006	4.3753	0.358
7	0.016	0.018	4.6019	0.466
8	0.035	0.032	5.6933	0.458
9	-0.009	-0.012	5.7644	0.568
10	-0.012	-0.015	5.8879	0.660
11	0.063	0.067	9.4538	0.396
12	0.045	0.049	11.319	0.333
13	0.016	0.010	11.548	0.399
14	-0.000	-0.003	11.548	0.483
15	-0.045	-0.043	13.351	0.421
16	-0.022	-0.015	13.774	0.467
17	0.005	0.014	13.797	0.541
18	0.009	0.008	13.877	0.608
19	-0.040	-0.052	15.353	0.570
20	-0.056	-0.064	18.172	0.444
21	0.008	0.015	18.234	0.507
22	-0.011	-0.006	18.338	0.565
23	-0.038	-0.046	19.674	0.542
24	0.021	0.013	20.091	0.577
25	0.048	0.045	22.166	0.510
26	-0.006	-0.003	22.200	0.567
27	-0.022	-0.016	22.645	0.598
28	-0.040	-0.035	24.122	0.569
29	-0.031	-0.031	24.985	0.575
30	-0.022	-0.013	25.448	0.603
31	-0.066	-0.055	29.469	0.441
32	0.037	0.036	30.703	0.430
33	-0.014	-0.015	30.882	0.472
34	-0.032	-0.039	31.824	0.476
35	0.016	0.016	32.059	0.514
36	0.050	0.049	34.342	0.451

*Probabilities may not be valid for this equation specification.

Figura 20: Correlograma dos resíduos da estimação AR-GARCH

Correlogram of Standardized Residuals Squared

Date: 12/21/20 Time: 16:02
Sample: 101 990
Included observations: 888

	AC	PAC	Q-Stat	Prob*
1	-0.012	-0.012	0.1263	0.722
2	-0.014	-0.014	0.2993	0.861
3	-0.013	-0.014	0.4609	0.927
4	0.028	0.028	1.1839	0.881
5	-0.063	-0.063	4.7442	0.448
6	0.012	0.011	4.8669	0.561
7	-0.031	-0.032	5.7390	0.571
8	0.011	0.008	5.8386	0.665
9	-0.001	0.002	5.8401	0.756
10	-0.021	-0.026	6.2288	0.796
11	-0.005	-0.002	6.2522	0.856
12	-0.005	-0.010	6.2720	0.902
13	0.051	0.052	8.5991	0.802
14	0.028	0.029	9.3306	0.809
15	-0.008	-0.008	9.3829	0.857
16	-0.017	-0.015	9.6601	0.884
17	-0.009	-0.015	9.7397	0.914
18	-0.016	-0.012	9.9758	0.933
19	-0.027	-0.026	10.655	0.935
20	0.012	0.013	10.794	0.951
21	-0.030	-0.032	11.613	0.949
22	0.007	0.004	11.657	0.964
23	-0.009	-0.008	11.735	0.974
24	0.002	-0.001	11.738	0.983
25	-0.024	-0.020	12.253	0.984
26	-0.031	-0.041	13.132	0.983
27	-0.014	-0.016	13.322	0.987
28	-0.016	-0.023	13.548	0.990
29	-0.018	-0.016	13.834	0.992
30	-0.012	-0.013	13.978	0.994
31	-0.006	-0.011	14.017	0.996
32	0.003	0.004	14.025	0.998
33	0.009	0.004	14.101	0.998
34	0.008	0.008	14.156	0.999
35	-0.004	-0.007	14.172	0.999
36	0.020	0.016	14.526	0.999

*Probabilities may not be valid for this equation specification.

Figura 21: Correlograma do quadrado dos resíduos da estimação AR-GARCH

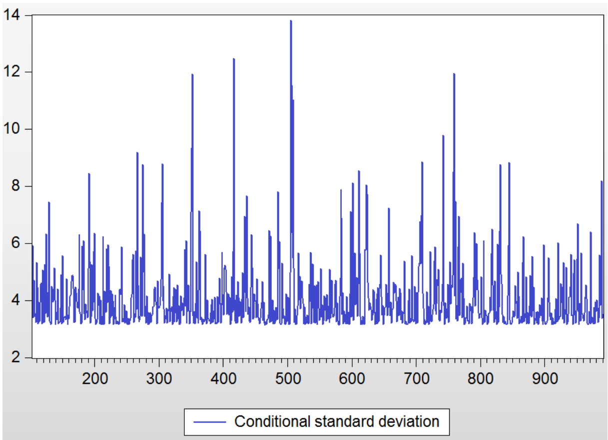


Figura 22: Variância condicional da série observada

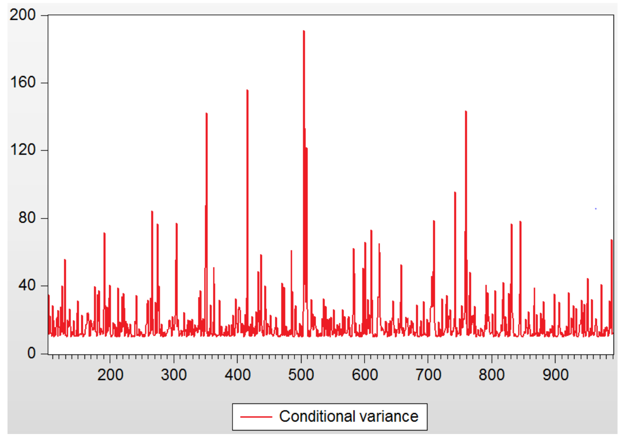


Figura 23: Variância condicional da série estimada

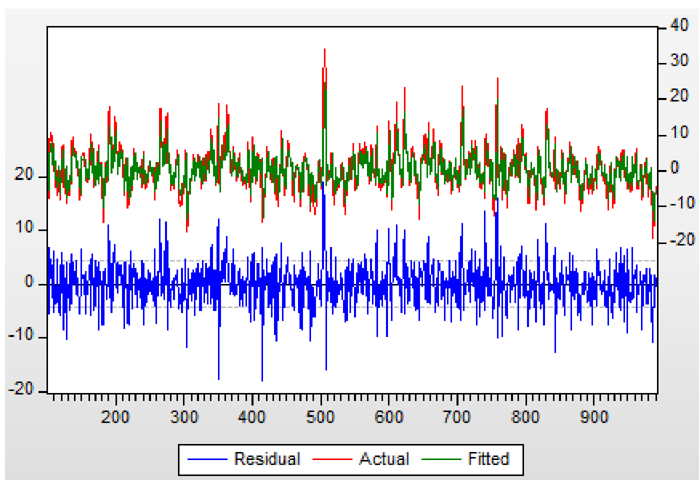


Figura 24: Trajetória das séries observada e estimada e trajetória do resíduo associado

Seguidamente decidimos fazer a estimação da nossa série temporal X, gerada por um AR(2), com base numa subsérie com apenas 390 observações, para verificarmos se continuamos a ter características de um processo AR de ordem 2, através do método dos mínimos quadrados. Os resultados desse método estão ilustrados na figura 25.

Dependent Variable: X2
Method: ARMA Maximum Likelihood (OPG - BHHH)
Date: 12/21/20 Time: 16:13
Sample: 101 490
Included observations: 390
Convergence achieved after 14 iterations
Coefficient covariance computed using outer product of gradients

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.424239	0.649537	0.653140	0.5141
AR(1)	0.767077	0.041522	18.47401	0.0000
AR(2)	-0.110144	0.049690	-2.216609	0.0272
SIGMASQ	17.11923	0.997715	17.15844	0.0000

R-squared	0.480905	Mean dependent var	0.502388
Adjusted R-squared	0.476871	S.D. dependent var	5.750112
S.E. of regression	4.158921	Akaike info criterion	5.700319
Sum squared resid	6676.498	Schwarz criterion	5.740997
Log likelihood	-1107.562	Hannan-Quinn criter.	5.716444
F-statistic	119.2008	Durbin-Watson stat	1.997612
Prob(F-statistic)	0.000000		

Inverted AR Roots	.58	.19

Figura 25: Teste de ajustamento para a subsérie com 390 observações

Como se pode ver o modelo estimado não está compatível com o nosso modelo inicial.
O primeiro p-valor apresentado, relativamente à variável C, é 0.5141, superior aos níveis de significância usuais, logo permite-nos verificar que o nosso processo é centrado, pois foram testadas as hipóteses H_0 : "C $= 0$" contra H_1 : "C $\neq 0$".
O segundo p-valor é relativo ao teste H_0 : "$\varphi_1 = 0$" contra H_1 : "$\varphi_1 \neq 0$" e sendo nulo, aceitamos H_1 porque, como sabemos, considerámos $\varphi_1 = \frac{5}{6}$ e o valor apresentado é $0.767077 \approx \frac{5}{6}$, mas mais afastado do valor estimado quando se considerou uma subsérie com 890 observações.
Relativamente ao terceiro p-valor apresentado concluímos que, para níveis de significância 0.01, o coeficiente φ_2 é zero, pois é aceite a hipótese nula. Isto diz-nos que o nosso modelo ficaria melhor ajustado a um modelo AR de ordem 1 para níveis de significância de 0.01.
O correlograma dos resíduos da estimação desta subsérie é compatível com um ruído branco, como se pode verificar na figura 26. Novamente o correlograma do quadrado dos resíduos mantém-se compatível com um AR(1), mas muito próximo de um ruído branco se for ignorado as autocorrelações de ordem 1.
Depois voltamos a testar a heteroscedasticidade dos erros e obtivémos um p-valor nulo, rejeitando assim a hipótese de ausência de heteroscedasticidade.

Correlogram of Residuals

Date: 12/21/20 Time: 16:15
Sample: 101 490
Included observations: 390
Q-statistic probabilities adjusted for 2 ARMA terms

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	-0.004	-0.004	0.0072	
		2	0.004	0.004	0.0136	
		3	-0.023	-0.022	0.2140	0.644
		4	0.060	0.060	1.6269	0.443
		5	-0.039	-0.039	2.2334	0.525
		6	-0.015	-0.016	2.3214	0.677
		7	0.020	0.023	2.4754	0.780
		8	0.039	0.034	3.0696	0.800
		9	-0.002	0.002	3.0716	0.878
		10	-0.044	-0.044	3.8664	0.869
		11	0.086	0.085	6.8462	0.653
		12	0.006	0.004	6.8625	0.738
		13	0.080	0.082	9.4891	0.577
		14	0.002	0.012	9.4913	0.660
		15	-0.040	-0.056	10.153	0.681
		16	0.001	0.009	10.154	0.751
		17	0.013	0.009	10.221	0.806
		18	-0.047	-0.045	11.140	0.801
		19	-0.069	-0.069	13.090	0.730
		20	-0.060	-0.071	14.577	0.691
		21	0.071	0.071	16.654	0.613
		22	-0.002	-0.003	16.655	0.675
		23	-0.002	0.009	16.657	0.732
		24	0.010	-0.001	16.697	0.780
		25	0.040	0.021	17.361	0.791
		26	-0.029	-0.015	17.725	0.816
		27	-0.014	-0.007	17.812	0.850
		28	-0.064	-0.062	19.539	0.813
		29	0.031	0.024	19.954	0.833
		30	-0.033	-0.025	20.416	0.849
		31	-0.025	-0.002	20.677	0.871
		32	-0.006	-0.001	20.694	0.897
		33	-0.025	-0.030	20.961	0.913
		34	-0.061	-0.074	22.573	0.891
		35	0.010	0.011	22.613	0.913
		36	0.033	0.035	23.081	0.922

Figura 26: Correlograma dos resíduos da subsérie com 390 observações

Correlogram of Residuals Squared

Date: 12/21/20 Time: 16:15
Sample: 101 490
Included observations: 390

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.203	0.203	16.260	0.000
		2	0.042	0.001	16.963	0.000
		3	-0.057	-0.069	18.245	0.000
		4	-0.072	-0.049	20.271	0.000
		5	-0.074	-0.049	22.447	0.000
		6	0.015	0.040	22.532	0.001
		7	-0.031	-0.048	22.924	0.002
		8	0.014	0.018	23.002	0.003
		9	0.008	0.001	23.028	0.006
		10	-0.008	-0.016	23.054	0.011
		11	0.076	0.086	25.365	0.008
		12	0.047	0.013	26.267	0.010
		13	0.005	-0.009	26.278	0.016
		14	-0.019	-0.016	26.430	0.023
		15	-0.055	-0.040	27.649	0.024
		16	-0.056	-0.024	28.950	0.024
		17	0.000	0.014	28.950	0.035
		18	-0.009	-0.013	28.982	0.049
		19	-0.058	-0.069	30.356	0.047
		20	-0.048	-0.035	31.288	0.051
		21	0.037	0.061	31.842	0.061
		22	-0.017	-0.047	31.965	0.078
		23	-0.049	-0.063	32.949	0.082
		24	-0.054	-0.038	34.154	0.082
		25	-0.050	-0.031	35.204	0.085
		26	-0.055	-0.037	36.461	0.084
		27	-0.035	-0.027	36.981	0.095
		28	0.010	0.018	37.025	0.118
		29	0.009	-0.016	37.055	0.145
		30	-0.003	-0.013	37.059	0.175
		31	-0.066	-0.063	38.902	0.156
		32	-0.068	-0.055	40.871	0.135
		33	-0.024	0.001	41.121	0.157
		34	-0.046	-0.053	42.024	0.162
		35	-0.012	-0.008	42.082	0.191
		36	-0.020	-0.027	42.258	0.219

Figura 27: Correlograma do quadrado dos resíduos da subsérie com 390 observações

Assim, procedemos à estimação do nosso modelo por um processo AR-GARCH com base numa subsérie com 390 observações.

Dependent Variable: X2
Method: ML ARCH - Normal distribution (BFGS / Marquardt steps)
Date: 12/21/20 Time: 16:16
Sample (adjusted): 103 490
Included observations: 388 after adjustments
Convergence achieved after 33 iterations
Coefficient covariance computed using outer product of gradients
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
GARCH = C(4) + C(5)*RESID(-1)^2 + C(6)*GARCH(-1)

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	-0.014677	0.597790	-0.024551	0.9804
AR(1)	0.760319	0.060988	12.46669	0.0000
AR(2)	-0.098401	0.056785	-1.732864	0.0831
		Variance Equation		
C	11.75584	2.778545	4.230933	0.0000
RESID(-1)^2	0.322719	0.084249	3.830556	0.0001
GARCH(-1)	0.003401	0.151591	0.022432	0.9821

R-squared	0.482585	Mean dependent var	0.523945
Adjusted R-squared	0.479897	S.D. dependent var	5.749087
S.E. of regression	4.146137	Akaike info criterion	5.638595
Sum squared resid	6618.325	Schwarz criterion	5.699848
Log likelihood	-1087.887	Hannan-Quinn criter.	5.662881
Durbin-Watson stat	1.980343		

Inverted AR Roots	.59	.17

Figura 28: Teste de ajustamento para a subsérie com 390 observações

Por fim, analisámos novamente o correlograma dos resíduos da estimação desta subsérie e agora podemos verificar que deixa de existir dependência de segunda ordem no correlograma do quadrado dos resíduos, tendo assim correlogramas compatíveis com ruídos brancos. Vejam-se as figuras 29 e 30.
É conveniente reforçar a análise feita até agora com a análise dos critérios presentes nos testes de ajustamento. Desta forma, iremos abordar os testes de Akaike, Schwarz, log-likelihood e, por fim, o r-quadrado.
O teste de Akaike (AIC) e Schwarz (BIC) estimam a quantidade relativa de informação perdida por um determinado modelo, ou seja, quanto menos informações um modelo perde, maior a qualidade do mesmo. Assim sendo, quanto menor o valor destas estatísticas, melhor será o modelo. Será de esperar que os modelos com menos observações tenham maior valor AIC e BIC.
O teste de r-quadrado (R^2) é uma medida estatística que nos indica o quão próximos estão os dados dos valores do nosso modelo, ou seja, o seu valor é a percentagem de dados que são explicados pelo modelo. Esta estatística varia entre 0 e 1.
Por fim, o teste de log-likelihood é um método cujo objetivo é encontrar coeficientes que maximizem o valor da função de verosimilhança, ou seja, encontrar um conjunto de parâmetros que produzem um modelo mais aproximado com a teoria. Esta estatística é sempre negativa e será tão melhor quanto maior for o seu valor.
Pela análise dos testes de ajustamento para o modelo com diferentes observações, obtém-se a seguinte tabela:

Modelo	AIC	BIC	R^2	Log-likelihood
890 observações	5.707474	5.729007	0.534222	-2535.826
390 observações	5.700319	5.740997	0.480905	-1107.562

Da tabela anterior pode-se verificar que, com a perda de observações, existe uma diminuição do R^2 e do BIC. Isto era de esperar pois, com menos observações, menor a percentagem de dados explicados pelo modelo (diminução de 53% para 48%) e, com menos observações, mais informação perdida, ou seja, menor a qualidade do modelo e maior a estatística BIC.
A análise da estatística de log-likelihood é mais pertinente quando se tenciona comparar modelos diferentes, por exemplo, AR(5) com MA(1). Desta forma, como estamos a comparar o mesmo modelo mas com observações diferentes, esta estatística não nos ajuda.

Correlogram of Standardized Residuals

Date: 12/21/20 Time: 16:16
Sample: 101 490
Included observations: 388
Q-statistic probabilities adjusted for 2 ARMA terms

	AC	PAC	Q-Stat	Prob*
1	0.003	0.003	0.0029	
2	0.005	0.004	0.0109	
3	-0.037	-0.037	0.5378	0.463
4	0.054	0.055	1.7078	0.426
5	-0.036	-0.037	2.2319	0.526
6	-0.021	-0.023	2.4147	0.660
7	0.014	0.018	2.4880	0.778
8	0.028	0.022	2.7982	0.834
9	-0.011	-0.009	2.8428	0.899
10	-0.037	-0.035	3.3788	0.908
11	0.092	0.092	6.7850	0.659
12	0.029	0.026	7.1345	0.713
13	0.069	0.070	9.0627	0.616
14	0.006	0.017	9.0797	0.696
15	-0.042	-0.055	9.7902	0.711
16	0.005	0.013	9.8010	0.777
17	-0.004	-0.003	9.8073	0.832
18	-0.052	-0.052	10.900	0.816
19	-0.077	-0.076	13.351	0.712
20	-0.048	-0.056	14.288	0.710
21	0.071	0.072	16.358	0.633
22	0.003	-0.001	16.361	0.694
23	-0.005	-0.002	16.371	0.748
24	0.004	-0.007	16.377	0.797
25	0.033	0.013	16.838	0.817
26	-0.037	-0.024	17.402	0.831
27	-0.025	-0.020	17.666	0.856
28	-0.058	-0.057	19.097	0.832
29	0.019	0.014	19.255	0.861
30	-0.023	-0.005	19.473	0.883
31	-0.043	-0.020	20.265	0.884
32	0.003	0.008	20.270	0.909
33	-0.042	-0.052	21.012	0.912
34	-0.056	-0.071	22.368	0.897
35	0.009	0.013	22.399	0.918
36	0.018	0.013	22.544	0.933

*Probabilities may not be valid for this equation specification.

Figura 29: Correlograma do quadrado dos resíduos da subsérie com 390 garch

Correlogram of Standardized Residuals Squared

Date: 12/21/20 Time: 16:17
Sample: 101 490
Included observations: 388

	AC	PAC	Q-Stat	Prob*
1	-0.010	-0.010	0.0422	0.837
2	0.044	0.044	0.7954	0.672
3	-0.041	-0.040	1.4428	0.696
4	-0.056	-0.059	2.6692	0.615
5	-0.083	-0.081	5.3814	0.371
6	0.072	0.075	7.4635	0.280
7	-0.050	-0.046	8.4446	0.295
8	0.037	0.021	9.0020	0.342
9	0.076	0.078	11.299	0.256
10	-0.036	-0.040	11.804	0.298
11	0.052	0.055	12.897	0.300
12	-0.035	-0.036	13.381	0.342
13	0.009	0.022	13.411	0.417
14	0.020	0.029	13.574	0.482
15	-0.024	-0.038	13.811	0.540
16	-0.059	-0.043	15.205	0.510
17	-0.011	-0.028	15.256	0.577
18	-0.012	0.002	15.318	0.640
19	-0.025	-0.032	15.580	0.685
20	-0.045	-0.068	16.404	0.691
21	0.014	0.021	16.479	0.742
22	0.003	-0.003	16.482	0.791
23	-0.026	-0.036	16.765	0.821
24	-0.052	-0.058	17.878	0.809
25	-0.023	-0.019	18.091	0.839
26	-0.054	-0.040	19.288	0.824
27	-0.009	-0.022	19.323	0.858
28	0.001	-0.001	19.323	0.888
29	-0.004	-0.006	19.330	0.913
30	-0.014	-0.021	19.416	0.931
31	-0.060	-0.071	20.937	0.914
32	-0.047	-0.048	21.858	0.911
33	0.005	0.014	21.867	0.931
34	-0.050	-0.055	22.945	0.925
35	-0.006	-0.021	22.958	0.941
36	-0.017	-0.038	23.077	0.953

*Probabilities may not be valid for this equation specification.

Figura 30: correlograma residuos quadrados 390 garch

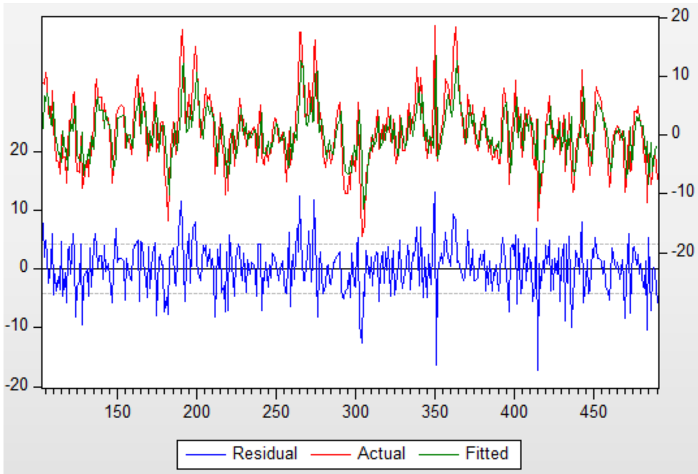


Figura 31: Trajetoria da subsérie com 390 observações

Modelação de uma série real

Nesta secção vamos abordar um exemplo prático considerando uma série temporal real relativa às cotações de fecho diárias da F. Ramada, retirada do índice PSI 20, entre 17-9-2018 e 14-9-2020. Foram-nos fornecidos os dados relativamente a esta empresa e pretende-se encontrar o melhor modelo estocástico da classe ARMA, com erros condicionalmente heteroscedásticos, que descreve a dinâmica subjacente a esta série temporal.

Analisando os dados que foram disponibilizados e o gráfico da trajetória da série podemos concluir que esta apresenta uma tendência decrescente ao longo de todo o seu período.

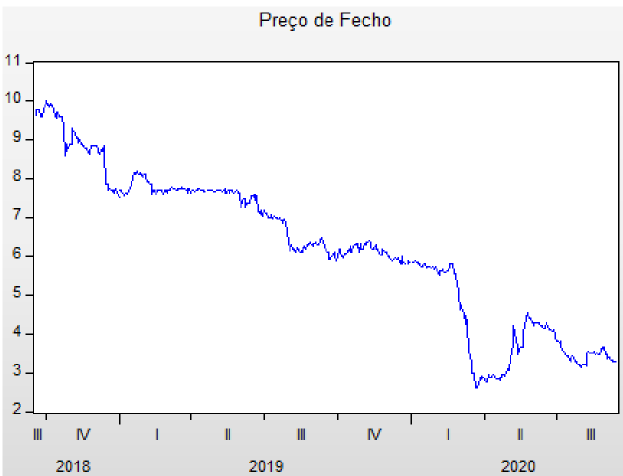


Figura 32: Cotação de fecho da ação da F. Ramada

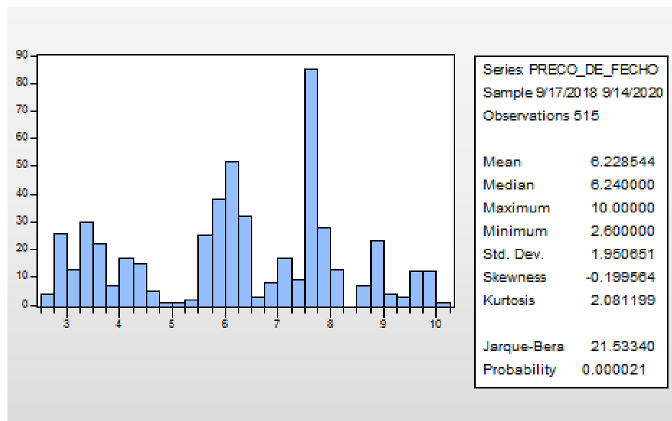
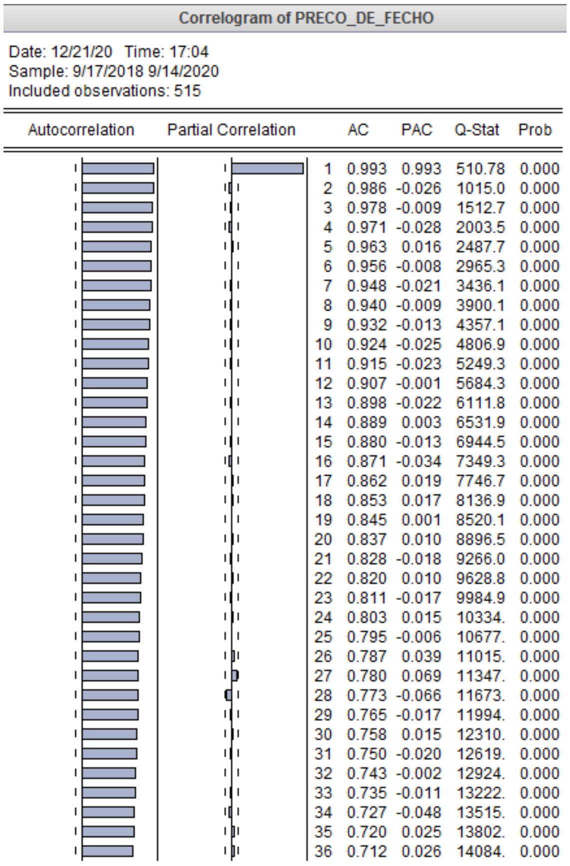


Figura 33: Análise descritiva da série F. Ramada

Através da análise descritiva observamos que a série apresenta uma distribuição com média aproximadamente igual a 6.23, desvio-padrão 1.95 e, como a curtose tem valor inferior a 3, concluímos que se trata de uma distribuição pláticurtica.
A partir do p-valor do teste Jarque-Bera, claramente inferior aos níveis de significância usuais, reforça-se a hipótese de que estamos perante uma distribuição não gaussiana.
De seguida, analisámos o correlograma da série e verifica-se que a autocorrelação não tem um decréscimo acentuado. Aliado a este comportamento a autocorrelacão parcial de ordem 1 apresenta um valor muito próximo da unidade, desta forma, recorremos ao teste de Dickey-Fuller para confirmar a não estacionaridade da série. De facto, como o p-valor deste teste é 0.7679, superior a qualquer nível de significância usual, aceitamos a hipótese nula, ou seja, aceitamos a não estacionaridade da série.
Isto justifica a necessidade de diferenciar a nossa série da forma

$$X_t - X_{t-1} = Y_t\,.$$



Correlogram of PRECO_DE_FECHO

Date: 12/21/20 Time: 17:04
Sample: 9/17/2018 9/14/2020
Included observations: 515

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.993	0.993	510.78	0.000
		2	0.986	-0.026	1015.0	0.000
		3	0.978	-0.009	1512.7	0.000
		4	0.971	-0.028	2003.5	0.000
		5	0.963	0.016	2487.7	0.000
		6	0.956	-0.008	2965.3	0.000
		7	0.948	-0.021	3436.1	0.000
		8	0.940	-0.009	3900.1	0.000
		9	0.932	-0.013	4357.1	0.000
		10	0.924	-0.025	4806.9	0.000
		11	0.915	-0.023	5249.3	0.000
		12	0.907	-0.001	5684.3	0.000
		13	0.898	-0.022	6111.8	0.000
		14	0.889	0.003	6531.9	0.000
		15	0.880	-0.013	6944.5	0.000
		16	0.871	-0.034	7349.3	0.000
		17	0.862	0.019	7746.7	0.000
		18	0.853	0.017	8136.9	0.000
		19	0.845	0.001	8520.1	0.000
		20	0.837	0.010	8896.5	0.000
		21	0.828	-0.018	9266.0	0.000
		22	0.820	0.010	9628.8	0.000
		23	0.811	-0.017	9984.9	0.000
		24	0.803	0.015	10334.	0.000
		25	0.795	-0.006	10677.	0.000
		26	0.787	0.039	11015.	0.000
		27	0.780	0.069	11347.	0.000
		28	0.773	-0.066	11673.	0.000
		29	0.765	-0.017	11994.	0.000
		30	0.758	0.015	12310.	0.000
		31	0.750	-0.020	12619.	0.000
		32	0.743	-0.002	12924.	0.000
		33	0.735	-0.011	13222.	0.000
		34	0.727	-0.048	13515.	0.000
		35	0.720	0.025	13802.	0.000
		36	0.712	0.026	14084.	0.000

Figura 34: Correlograma da série F. Ramada

Augmented Dickey-Fuller Unit Root Test on PRECO_DE_FECHO

Null Hypothesis: PRECO_DE_FECHO has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=18)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-0.961727	0.7679
Test critical values:	1% level	-3.442845	
	5% level	-2.866943	
	10% level	-2.569709	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(PRECO_DE_FECHO)
Method: Least Squares
Date: 12/21/20 Time: 17:04
Sample (adjusted): 9/18/2018 9/14/2020
Included observations: 514 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
PRECO_DE_FECHO(-1)	-0.002518	0.002618	-0.961727	0.3366
C	0.003286	0.017100	0.192165	0.8477

R-squared	0.001803	Mean dependent var	-0.012412
Adjusted R-squared	-0.000146	S.D. dependent var	0.115524
S.E. of regression	0.115533	Akaike info criterion	-1.474645
Sum squared resid	6.834063	Schwarz criterion	-1.458138
Log likelihood	380.9837	Hannan-Quinn criter.	-1.468175
F-statistic	0.924918	Durbin-Watson stat	1.978042
Prob(F-statistic)	0.336641		

Figura 35: Teste de Dickey-Fuller

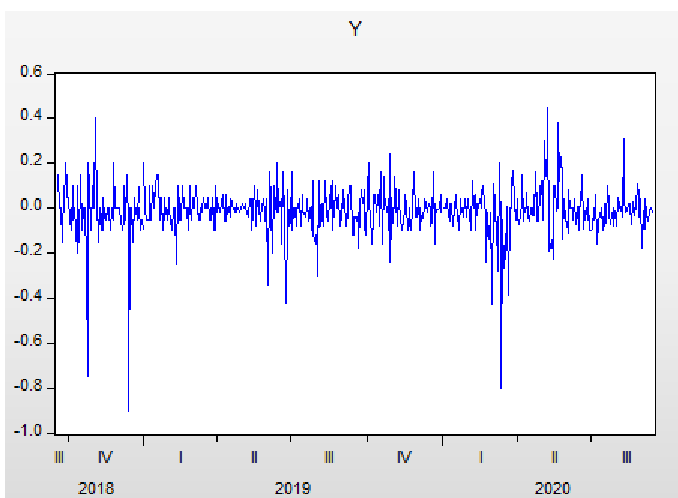


Figura 36: Trajetória da série diferenciada

Analisando o correlograma da série diferenciada, verificamos que as autocorrelações e as autocorrelações parciais não diferem muito de zero, pelo que concluimos que estamos perante um ruído branco. Mais, no teste de Dickey-Fuller, obtivémos um p-valor nulo, o que nos leva a aceitar a hipótese de estacionaridade da série.
No que respeita à análise descritiva verificamos que a sua média é aproximadamente zero, o desvio-padrão 0.12 e a sua curtose é, aproximadamente, 17.75, pelo que estamos claramente perante uma distribuição leptocúrtica e, portanto, não gaussiana.
Apesar das nossas autocorrelações evidenciarem todas as caracteristicas de um ruído branco para a série diferenciada, note-se que a autocorrelação parcial de ordem 3 gera duvidas em relação à sua proximidade de zero. Desta forma decidimos ver o comportamento da série segundo um modelo AR(3).

Correlogram of Y

Date: 12/21/20 Time: 17:07
Sample: 9/17/2018 9/14/2020
Included observations: 514

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.008	0.008	0.0360	0.850
		2	0.019	0.019	0.2318	0.891
		3	0.087	0.087	4.1830	0.242
		4	-0.009	-0.010	4.2212	0.377
		5	0.036	0.033	4.8939	0.429
		6	0.085	0.078	8.6330	0.195
		7	-0.082	-0.084	12.165	0.095
		8	-0.039	-0.048	12.980	0.113
		9	0.088	0.081	17.036	0.048
		10	0.044	0.060	18.056	0.054
		11	0.084	0.081	21.751	0.026
		12	0.096	0.081	26.655	0.009
		13	-0.072	-0.070	29.389	0.006
		14	0.016	-0.007	29.522	0.009
		15	0.064	0.032	31.721	0.007
		16	-0.056	-0.049	33.368	0.007
		17	0.016	0.011	33.503	0.010
		18	-0.074	-0.078	36.452	0.006
		19	-0.015	0.018	36.566	0.009
		20	-0.001	-0.023	36.567	0.013
		21	-0.016	-0.038	36.712	0.018
		22	0.032	0.046	37.280	0.022
		23	-0.091	-0.104	41.795	0.010
		24	-0.005	0.002	41.811	0.014
		25	-0.052	-0.053	43.259	0.013
		26	0.036	0.040	43.944	0.015
		27	-0.012	0.002	44.017	0.021
		28	0.001	0.025	44.018	0.028
		29	-0.046	-0.031	45.178	0.028
		30	0.025	0.038	45.517	0.035
		31	-0.049	-0.066	46.849	0.034
		32	-0.022	-0.015	47.110	0.041
		33	-0.001	0.016	47.111	0.053
		34	-0.100	-0.091	52.592	0.022
		35	-0.086	-0.051	56.664	0.012
		36	0.146	0.146	68.570	0.001

Figura 37: Correlograma da série diferenciada

Augmented Dickey-Fuller Unit Root Test on Y

Null Hypothesis: Y has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=18)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-22.46089	0.0000
Test critical values:	1% level	-3.442869	
	5% level	-2.866954	
	10% level	-2.569715	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(Y)
Method: Least Squares
Date: 12/23/20 Time: 17:02
Sample (adjusted): 9/19/2018 9/14/2020
Included observations: 513 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
Y(-1)	-0.991658	0.044150	-22.46089	0.0000
C	-0.012625	0.005130	-2.461192	0.0142

R-squared	0.496796	Mean dependent var	-0.000312
Adjusted R-squared	0.495811	S.D. dependent var	0.162693
S.E. of regression	0.115522	Akaike info criterion	-1.474815
Sum squared resid	6.819503	Schwarz criterion	-1.458284
Log likelihood	380.2900	Hannan-Quinn criter.	-1.468335
F-statistic	504.4917	Durbin-Watson stat	2.000847
Prob(F-statistic)	0.000000		

Figura 38: Teste de Dickey-Fuller da série diferencial

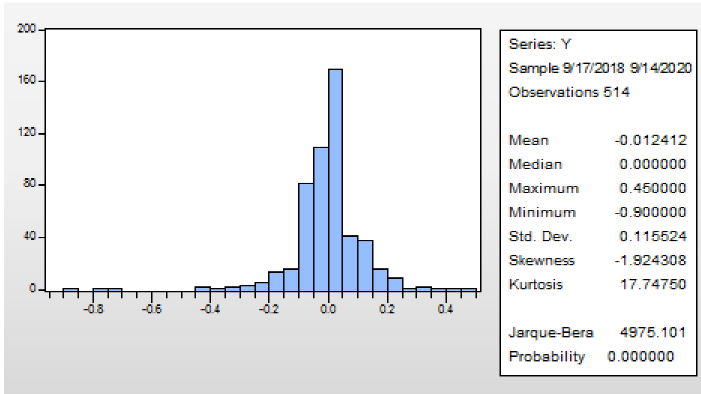


Figura 39: Análise descritiva da série diferenciada

Com base no teste de ajustamento, apresentado na figura 32, tiramos algumas conclusões relativamente à possibilidade da série seguir um modelo AR(3) da forma

$$X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + \varphi_3 X_{t-3} + \varepsilon_t \,.$$

O primeiro p-valor apresentado, relativamente à variável C, é 0.0595, superior aos níveis de significância usuais, logo permite-nos verificar que, de facto, o nosso processo é centrado, pois foram testadas as hipóteses H_0 : "C = 0" contra H_1 : "C $\neq$ 0". O segundo p-valor é relativo ao teste H_0 : "$\varphi_1 = 0$" contra H_1 : "$\varphi_1 \neq 0$" e sendo 0.8675, aceitamos H_0. De forma análoga se tira as mesmas conclusões para φ_2. Em relação φ_3, aceitamos a hipótese H_0 para níveis de significância iguais ou inferiores a 0.01. No entanto, ao nível de significância 0.05 rejeitamos H_0, a favor da hipótese que φ_3 existe e tem o valor aproximado de 0.089.

Dependent Variable: Y
Method: ARMA Maximum Likelihood (OPG - BHHH)
Date: 01/15/21 Time: 15:41
Sample: 9/18/2018 9/14/2020
Included observations: 514
Convergence achieved after 13 iterations
Coefficient covariance computed using outer product of gradients

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.012366	0.006548	-1.888545	0.0595
AR(1)	0.006533	0.039139	0.166925	0.8675
AR(2)	0.018688	0.036269	0.515270	0.6066
AR(3)	0.086811	0.040430	2.147196	0.0322
SIGMASQ	0.013213	0.000407	32.48709	0.0000

R-squared	0.008038	Mean dependent var	-0.012412
Adjusted R-squared	0.000242	S.D. dependent var	0.115524
S.E. of regression	0.115510	Akaike info criterion	-1.469191
Sum squared resid	6.791378	Schwarz criterion	-1.427925
Log likelihood	382.5822	Hannan-Quinn criter.	-1.453017
F-statistic	1.031100	Durbin-Watson stat	1.994444
Prob(F-statistic)	0.390556		

Inverted AR Roots	.46	-.23+.37i	-.23-.37i

Figura 40: Teste de ajustamento

Seguidamente, com a análise do correlograma dos resíduos, podemos verificar que este corresponde a um ruído branco, conclusão também retirada através do correlograma do quadrado dos resíduos.

Correlogram of Residuals

Date: 01/15/21 Time: 15:37
Sample: 9/17/2018 9/14/2020
Included observations: 514
Q-statistic probabilities adjusted for 3 ARMA terms

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.001	0.001	0.0004	
		2	-0.003	-0.003	0.0041	
		3	-0.007	-0.007	0.0303	
		4	-0.005	-0.005	0.0420	0.838
		5	0.038	0.038	0.7858	0.675
		6	0.072	0.072	3.4720	0.324
		7	-0.089	-0.090	7.6244	0.106
		8	-0.053	-0.053	9.0912	0.105
		9	0.073	0.076	11.920	0.064
		10	0.056	0.056	13.592	0.059
		11	0.086	0.080	17.504	0.025
		12	0.083	0.087	21.182	0.012
		13	-0.075	-0.059	24.180	0.007
		14	0.007	0.000	24.204	0.012
		15	0.065	0.045	26.427	0.009
		16	-0.048	-0.053	27.667	0.010
		17	0.015	0.014	27.780	0.015
		18	-0.079	-0.072	31.084	0.009
		19	-0.012	0.010	31.167	0.013
		20	0.006	-0.015	31.189	0.019
		21	-0.008	-0.043	31.223	0.027
		22	0.039	0.051	32.061	0.031
		23	-0.095	-0.108	36.912	0.012
		24	-0.004	-0.002	36.919	0.017
		25	-0.054	-0.053	38.478	0.016
		26	0.048	0.032	39.756	0.016
		27	-0.012	-0.002	39.832	0.022
		28	0.009	0.026	39.875	0.030
		29	-0.047	-0.026	41.084	0.030
		30	0.027	0.037	41.489	0.037
		31	-0.041	-0.057	42.393	0.040
		32	-0.009	-0.011	42.438	0.051
		33	-0.013	0.007	42.533	0.064
		34	-0.096	-0.098	47.648	0.028
		35	-0.081	-0.050	51.247	0.017
		36	0.152	0.148	64.083	0.001

Figura 41: Correlograma dos resíduos

Correlogram of Residuals Squared

Date: 01/15/21 Time: 15:37
Sample: 9/17/2018 9/14/2020
Included observations: 514

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.050	0.050	1.2964	0.255
		2	0.050	0.047	2.5793	0.275
		3	0.028	0.023	2.9859	0.394
		4	0.000	-0.004	2.9860	0.560
		5	0.003	0.000	2.9894	0.702
		6	0.056	0.056	4.6174	0.594
		7	0.054	0.049	6.1248	0.525
		8	0.063	0.053	8.1835	0.416
		9	0.051	0.039	9.5355	0.389
		10	0.008	-0.003	9.5695	0.479
		11	-0.008	-0.015	9.6028	0.566
		12	-0.011	-0.015	9.6685	0.645
		13	0.056	0.054	11.300	0.586
		14	-0.013	-0.024	11.383	0.656
		15	-0.014	-0.027	11.483	0.718
		16	-0.015	-0.023	11.605	0.771
		17	-0.030	-0.030	12.085	0.795
		18	-0.010	-0.005	12.140	0.840
		19	-0.011	-0.011	12.206	0.877
		20	-0.022	-0.021	12.469	0.899
		21	-0.037	-0.037	13.207	0.901
		22	-0.019	-0.014	13.405	0.921
		23	-0.007	0.006	13.435	0.942
		24	-0.022	-0.011	13.704	0.953
		25	-0.011	-0.001	13.768	0.966
		26	-0.006	-0.002	13.786	0.976
		27	-0.024	-0.014	14.088	0.980
		28	-0.022	-0.011	14.354	0.984
		29	0.078	0.092	17.711	0.950
		30	-0.028	-0.024	18.146	0.956
		31	-0.015	-0.018	18.276	0.966
		32	-0.017	-0.017	18.429	0.973
		33	-0.021	-0.012	18.668	0.979
		34	0.012	0.023	18.751	0.984
		35	0.001	-0.003	18.752	0.989
		36	0.264	0.266	57.376	0.013

Figura 42: Correlograma dos resíduos quadráticos

Assim, resta testar a heteroscedasticidade do modelo AR(3).
Como podemos ver na figura 35, o p-valor do teste de heteroscedasticidade é 0.2575, superior a qualquer nível de significância usual, logo aceitamos a hipótese nula, ou seja, estamos na presença de um processo de erro homocedástico.

Heteroskedasticity Test: ARCH

F-statistic	1.284850	Prob. F(1,511)	0.2575
Obs*R-squared	1.286644	Prob. Chi-Square(1)	0.2567

Test Equation:
Dependent Variable: RESID^2
Method: Least Squares
Date: 01/15/21 Time: 15:36
Sample (adjusted): 9/19/2018 9/14/2020
Included observations: 513 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.012525	0.002430	5.153952	0.0000
RESID^2(-1)	0.050081	0.044182	1.133512	0.2575

R-squared	0.002508	Mean dependent var	0.013188
Adjusted R-squared	0.000556	S.D. dependent var	0.053437
S.E. of regression	0.053422	Akaike info criterion	-3.017287
Sum squared resid	1.458363	Schwarz criterion	-3.000756
Log likelihood	775.9342	Hannan-Quinn criter.	-3.010807
F-statistic	1.284850	Durbin-Watson stat	2.004266
Prob(F-statistic)	0.257531		

Figura 43: Heteroscedasticidade do modelo AR(3)

Podemos ver que através do *Eviews* podemos ainda comparar a nossa série estimada com a série diferenciada, bem como a trajetória do resíduo associado.

Por fim, recorremos ao forecast e como o erro associado à série diferenciada é um ruido branco, por definição, temos que $E(\varepsilon_t) = 0$ e que $E(\varepsilon_t^2)$ existe e é independente de t.

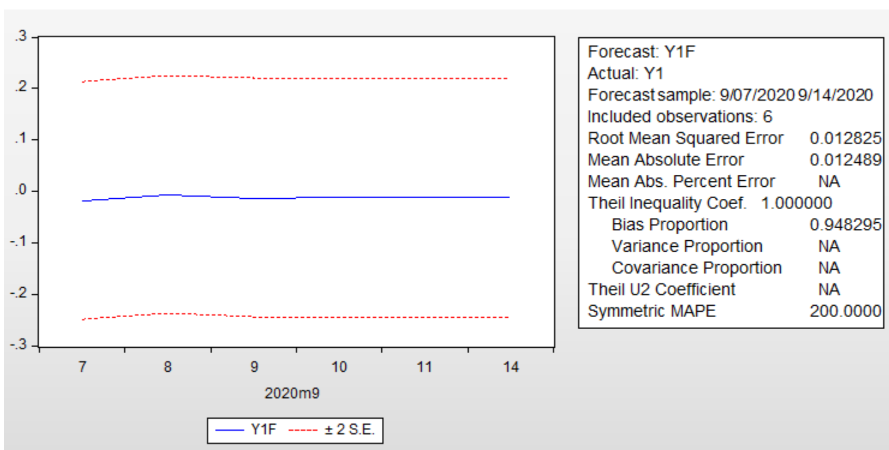


Figura 44: Forecast

Através da analise da figura 44, podemos verificar que $E(\varepsilon_t)$ é um valor relativamente próximo de zero. A vermelho e tracejado temos a representação de $E(\varepsilon_t^2)$, que, como podemos ver, se mantém com poucas oscilações ao longo do tempo, o que nos permite concluir que $E(\varepsilon_t^2)$ existe e é independente de t, tal como seria de esperar.

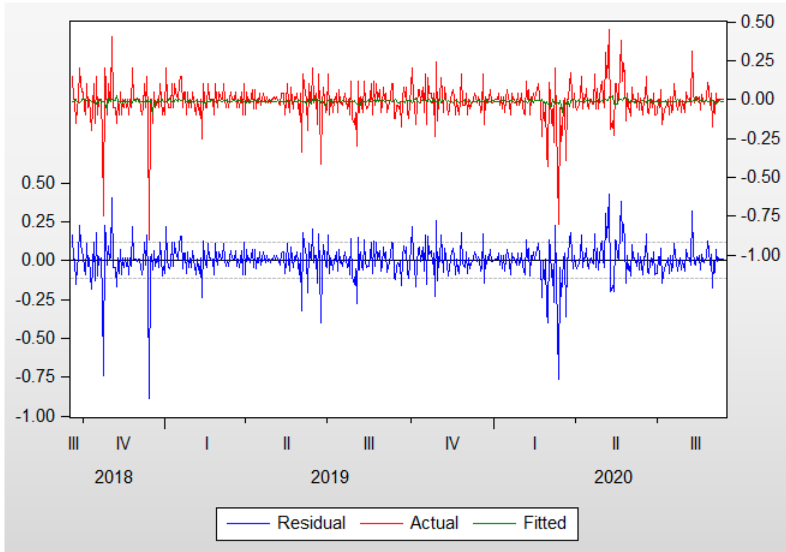


Figura 45: Trajetória das séries observada e estimada e trajetória do resíduo associado

Considerações Finais

A realização deste projeto computacional permitiu-nos aplicar alguns resultados teóricos abordados na cadeira de Séries Temporais, assim como a respetiva análise de conhecimentos adquiridos ao longo do semestre. Através da utilização do software *Eviews* foi possível modelar séries e realizar previsões, o que nos permitiu consolidar os conhecimentos adquiridos nas aulas. Além disso, é de salientar a relevante componente prática do trabalho, que nos levou a prever uma série temporal representada pelas cotações de fecho diárias da F Ramada, dando-nos assim a conhecer uma aplicação bastante prática desta disciplina.

Bibliografia

Gonçalves, E., N. Mendes-Lopes, Séries Temporais. Modelações lineares e não lineares. (slides disponibilizados 2020/2021)