DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Equações de Lotka-Volterra aplicadas à Economia

João Pedrosa Marcelino

Trabalho realizado no âmbito do **Seminário Matemático**
Disciplina da Licenciatura em Matemática

Orientador: Maria de Fátima da Silva Leite

Resumo

Durante a primeira guerra mundial, como seria de esperar, ocorreu uma redução da pesca nos países envolvidos nesse conflito, foi então com o objetivo de estudar de que forma a diminuição da pesca influenciava o desenvolvimento das espécies, que surgiram as equações de Lotka-Volterra. Este modelo permitiu em 1920 estudar de que forma a pesca influenciava o desenvolvimento das espécies num modelo presa-predador.
As pequisas da altura mostraram que a diminuição da pesca é mais benéfica para os predadores do que para as presas, tendo ocorrido até 1918, ano do fim da primeira guerra mundial, um aumento da percentagem de predadores.
Foi com o objetivo de compreender este fenómeno que surgiram as equações de Lotka-Volterra. Desde então estas equações têm sido aplicadas em diveras áreas ciêntificas desde a biologia à economia,e até no estudo do consumo de dióxido de carbono na atmosfera por parte das plantas.
Iremos então analisar inicialmente o modelo de Lotka-Volterra e depois abordar um modelo aplicado à economia e perceber a relação salários-emprego dentro de uma dada empresa.

Palavras Chave: Lotka-Volterra; Predador; Presa; Equações Diferenciais; Goodwin; Salários; Emprego

Conteúdo

1 Modelo de Lotka-Volterra

Seja $x(t)$ a população de presas e $y(t)$ a de predadores. Consideremos um modelo de interação predador-presa em que as presas não competem de forma muito intensa entre si pelo seu alimento, isto é, no meio onde habitam as presas o aliemnto existe em abundância para a população em causa .Assim, na ausência de predadores a variação da população de presas é dada por:

$$\frac{dx}{dt} = ax$$

Como é expectável,na ausência de predadores e com alimento em abundância, a população de presas aumenta ao longo do tempo,t,portanto podemos afirmar, $a > 0$.
Ao adicionar os predadores no sistema, Volterra considerou que a interação entre as duas espécies seria dada por bxy , $b > 0$.
Assim, adicionando os predadores ao sistema, teremos de subtrair bxy na expressão anterior. Portanto, temos agora que a variação da população de presas é dada por:

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy.$$

Considerando que a população de predadores tem tendência natural para diminuir a uma taxa $-cy$, obtemos a expressão da variação da população de predadores que é dada pela equação:

$$\frac{dy}{dt} = -cy + dxy.$$

Obtemos assim, o seguinte sistema, correspondente ao modelo predador-presa de Lotka-Volterra:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = ax - bxy \\ \frac{\partial y}{\partial t} = -cy + dxy \end{cases} \tag{1}$$

1.1 Família de Soluções

O sistema (1) tem as seguintes famílias de soluções:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{at} \\ y(t) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = y_0 e^{-ct} \end{cases} \tag{3}$$

Verifiquemos agora que (2), é efetivamente uma famíia de soluções do sistema dado anteriormente.
Para $x(t) = x_0 e^{at}$, temos $\frac{\partial x}{\partial t}(t) = ax_0 e^{at}$.
Dadas estas equações verifiquemos que se verificam as equações do sistema.

$\frac{dx}{dt} = ax - bxy \Leftrightarrow ax_0 e^{at} = ax_0 e^{at} - bx_0 e^{at} \times 0 \Leftrightarrow ax_0 e^{at} = ax_0 e^{at}.$

Portanto concluimos assim que (2) é uma família de soluções do sistema.
De modo análogo concluimos o mesmo para (3).

1.2 Pontos de equilíbrio

Determinemos os pontos de equilíbrio do sistema (1).

Isto é, queremos determinar os pontos do sistema,da forma (x, y), que respeitam a seguinte condição:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial t} = 0$$

Ora, portanto:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax - bxy = 0 \\ -cy + dxy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(a - by) = 0 \\ y(dx - c) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = \frac{a}{b} \\ x = \frac{c}{d} \end{cases}$$

Obtemos assim que $(0, 0)$ e $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ são pontos de equilíbrio do sistema.

1.3 Órbita

As órbitas do sitema, para $x, y \neq 0$ são solução da equação:

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dx} = \frac{ax - bxy}{-cy + dxy} = \frac{x(a - by)}{y(dx - c)}$$

A equação é assim separável e podemos escrevê-la na forma:

$$\frac{a - by}{y} \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{-c + dx}{x}$$

Obtemos assim,

$$\left(\frac{a}{y} - b\right) \partial y = \left(\frac{-c}{x} + d\right) \partial y.$$

Primitivando do lado esquerdo da equação em ordem a y e do lado direito em ordem a x, obtemos:

$$aln(y) - by + cln(x) - dx = k$$

para uma constante k.

Usando exponenciais e aplicando algumas propriedades obtemos:

$$\frac{y^a}{e^{by}} \frac{x^c}{e^{dx}} = K.$$

Proposição:

As órbitas das soluções do sistema (1) são curvas fechadas e portanto as soluções são periódicas.

Demonstração. Consideremos assim $f(y) = \frac{y^a}{e^{by}}$ e $g(x) = \frac{x^c}{e^{dx}}$.

Determinemos o valor de y, para o qual f(y) atinge o seu máximo, assim:

$$\frac{df}{dy}(y) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{a}{b}$$

Então f atinge um máximo $M_y = \frac{\left(\frac{a}{b}^a\right)}{e^a}$ para $y = \frac{a}{b}$.

De modo análogo, para g(x), obtemos:

$$\frac{dg}{dx}(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{c}{d}$$

Portanto g atinge um máximo $M_x = \frac{\left(\frac{c}{d}^c\right)}{e^c}$ para $x = \frac{c}{d}$.

Não há assim solução para $k > M_x M_y$,com $x, y > 0$ e temos $x = \frac{c}{d}$ e $y = \frac{a}{b}$ como solução para $K = M_x M_y$.

Seja agora $K = \lambda M_y$, com $0 < \lambda < M_x$.

A equação $g(x) = \frac{x^c}{e^{dx}} = \lambda$ tem uma única solução para $x < \frac{c}{d}$ e outra para $x > \frac{c}{d}$, sejam essas soluções dadas respetivamente por x_m e x_M.

Temos que a equação

$$f(y) = \frac{y^a}{e^{by}} = \left(\frac{\lambda}{x^c e^{-dx}}\right) M_y$$

não tem solução para $x < x_m$ ou $x > x_M$.

Mas para $x = x_m$ ou $x = x_M$ temos a solução única $y = \frac{a}{b}$.

Então como $\lambda < M_x$, $f(y) = \frac{\lambda}{g(x)} M_y$ com

$$\begin{cases} g(x_m) = \lambda \\ g(x_M) = \lambda \end{cases}$$

Seja $x_0 < x_m$.Então:

$x_0 < x_m \Rightarrow g(x_0) < \lambda \Rightarrow \frac{g(x_m)}{g(x_0)} > 1 \Rightarrow \frac{\lambda}{g(x_0)} M_y > M_y$

De modo análogo, para $x_1 > x_M$, temos:

$x_1 > x_M \Rightarrow g(x_0) < g(x_M) = \lambda \Rightarrow \frac{g(x_M)}{g(x_1)} > 1 \Rightarrow \frac{\lambda}{g(x_1)} M_y > M_y$

Logo náo há solução para um x_1 fixo tal que $x_1 < x_M$. Portanto concluimos que não há solução y para um x_0 fixo, tal que $x_0 < x_m$.Nem para x_1 fixo,tal que $x_1 > x_M$.

Há assim uma solução única $y = \frac{a}{b}$ para $x = x_m$ ou $x = x_M$, há tambem duas soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ para cada $x \in]x_m, x_M[$.

$y_1(x) < \frac{a}{b}$ e $y_1(x) > \frac{a}{b}$.

Ao aproximar x de x_m ou de x_M, quer $y_1(x)$ quer $y_2(x)$ aproximam-se de $\frac{a}{b}$.

Podemos assim concluir que

$$\frac{y^a}{e^{by}} \frac{x^c}{e^{dx}} = K$$

é uma curva fechada para $x, y > 0$. $\square$

1.4 Principio de Volterra

Proposição:

Seja $x(t)$, $y(t)$ uma solução periódica do sistema do modelo predador-presa (1), com periodo T.

$$\bar{x} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt, \bar{y} = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)dt$$

Então $\bar{x} = \frac{c}{d}$ e $\bar{y} = \frac{a}{b}$.Isto é, os valores médios de $x(t)$ e $y(t)$ são os valores de equilíbrio.

Demonstração. Comecemos por $\bar{x}$.

Dividindo por x ambos os membros da equação: $x'(t) = ax - bxy$ obtemos:

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = a - by$$

Assim,

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{x'(t)}{x(t)}dt = \frac{1}{T}\int_0^T a - by(t)dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{T}\left[ln(x(T)) - ln(x(0))\right] = \frac{1}{T}\int_0^T adt - \frac{b}{T}\int_0^T y(t)dt$$

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{1}{T}aT - b\bar{y} \Leftrightarrow \bar{y} = \frac{a}{b}$$

Tendo agora em conta $\bar{y}$, e dividindo por y ambos os membros da equação: $y'(t) = -cy + dxy$ obtemos:

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = -c + dx$$

Assim:

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{y'(t)}{y(t)}dt = \frac{1}{T}\int_0^T -c + dx(t)dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{T}\left[ln(y(T)) - ln(y(0))\right] = \frac{1}{T}\int_0^T -cdt + \frac{d}{T}\int_0^T y(t)dt$$

$$\Leftrightarrow 0 = -\frac{1}{T}cT + d\bar{x} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{c}{d}$$

□

Exemplo particular:

Fazendo $a = 2$,$b = 1$,$c = 4$ e $d = 2$, por substituição em (1),obtemos o seguinte campo de direções:

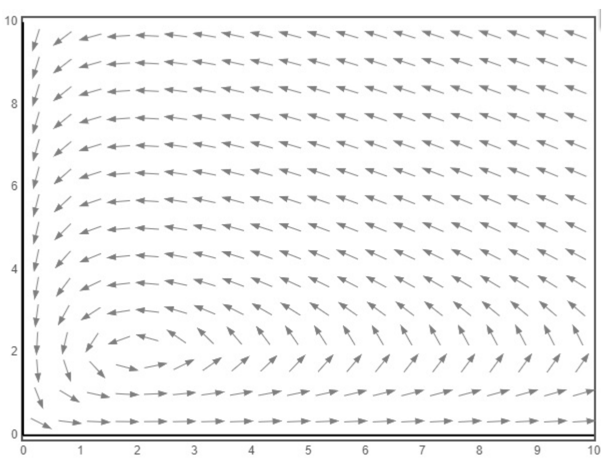

Figura 1: Campo de direções.

2 Modelo de Goodwin

Segundo os economistas existem três tipos principais de modelos económicos,em que:

- O sistema económico tem tendência a manter-se em equilíbrio como acontece com os sistemas económicos atuais dos paises mais desenvolvidos economicamente.
- O crescimento é cíclico e pequenas alterações afetam de forma substancial o sistema económico no futuro. Os sistemas económicos com foco para o mercado são um bom exemplo disso,em que os mecanismos de preço atuam com base na lei da oferta e da procura. Estações do ano e condições climatéricas têm uma influência tremenda nas atividades económicas deste sistema.
- Sistemas económicos que quando sujeitos a choques aleatórios provocam um comportamente imprevisível nos recursos, e consequentemente na economia.Os sistemas económicos são um exemplo disso mesmo, em que os valores de produtos são decididos por um órgão central com base na informação dos recursos de produção disponíveis e das necessidades do país que representa.

2.1 Introdução e suposições

O modelo económico de Goodwin assemelha-se ao modelo predador-presa de Lotka-Volterra, havendo uma analogia dos salários aos predadores, e do emprego às presas. É possivel verificar que um aumento dos empregados por parte de uma empresa provoca um aumento das despesas, e um aumento das despesas terá como efeito a diminuição do lucro das empresas. Para fazer frente a essa diminuição de lucro a empresa despede empregados,o que provoca uma diminuição das despesas empresariais, consequentemente o lucro aumenta, provocando a contratação de mais empregados.

Ao desenvolver este modelo, Goodwin fez uma série de suposições iniciais:

1. A produtividade, a, e o trabalho, n, aumentam de forma constante.
2. Existem apenas dois fatores de desenvolvimento: capital,k, e emprego, E.
3. Os valores em causa são liquidos (não se estuda por exemplo, a existência de impostos nem de despesas adicionais das empresas).
4. Os salários dos trabalhadores,s e os lucros empresariais são respetivamente gastos e investidos por cada uma das entidades.
5. A razão entre o capital das empresas e a produção,p, é uma constante dada por δ.
6. A despesa das empresas com salários aumenta com o respetivo aumento de empregados.

2.2 Dedução do Modelo de Goodwin

Pela suposição 1, obtemos que a produtividade do trabalho dos trabalhadores é dada por a, tal que:

$$a = a_0 e^{\alpha t}, \alpha > 0.$$

Também pela suposição 1, o crescimento do trabalho é dado por n, tal que:

$$n = n_0 e^{\beta t}, \beta > 0.$$

Pela suposição 5, sabemos que δ é uma constante dada por:

$$\delta = \frac{k}{p}. \tag{4}$$

O coeficiente salário/produtividade dado por , u, representa os gastos que a empresa tem com salários por produtividade dos trabalhadores:

$$u = \frac{s}{a}$$

Sabemos que o rendimento do trabalho dos trabalhadores tem valor a, portanto $a - s$, determinará o sinal do aumento de capital.
Assim:

$$\begin{cases} salario > produtividade \to prejuizo \\ salario = produtividade \to 0 \\ salario < produtividade \to lucro \end{cases}$$

Assim vem que o lucro pelo rendimento dos trabalhadores depende de:

$$a - s \tag{5}$$

O lucro da empresa também dependerá da razão entre a produção e a produtividade dos trabalhadores,que representa o número de empregados:

$$\frac{p}{a} \tag{6}$$

Pela suposição 2 e 3, a variação do capital de uma empresa representa o lucro ou prejuízo obtido, multiplicando (5) e (6), obtemos assim a variação do capital:

$$\frac{dk}{dt}(t) = (a - s) \times \frac{p}{a} \Leftrightarrow \frac{dk}{dt}(t) = (1 - u)p. \tag{7}$$

A expressão do número de empregados de uma dada empresa, como já foi referido, é obviamente dado pela produção a dividir pela produtividade dos trabalhadores, assim temos:

$$E = \frac{p}{a}.$$

Determinemos agora $\frac{dp}{dt}(t)$:

Ora por (4), temos que:

$$p = \frac{k}{\delta} \tag{8}$$

Então por (8), obtemos que:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\frac{dk}{dt}(t)}{\delta} = \frac{(1-u)p}{\delta}$$

Portanto:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{(1-u)p}{\delta} \tag{9}$$

Determinemos agora a expressão de: $\frac{dE}{dt}(t)$.
Ora sabemos que $E = \frac{p}{a}$, portanto:

$$\frac{dE}{dt}(t) = \frac{\frac{dp}{dt}(t)a - p\frac{da}{dt}(t)}{a^2}$$

Usando o resultado (9), vem que:

$$\frac{dE}{dt}(t) = \frac{p\frac{1-u}{\delta}a - p\alpha a_0 e^{\alpha t}}{a^2} = \frac{p\frac{1-u}{\delta} - p\alpha}{a} = \frac{p}{a}\left[\frac{(1-u)}{\delta} - \alpha\right]$$

Chegámos assim à expressão:

$$\frac{dE}{dt}(t) = \frac{p}{a}\left[\frac{(1-u)}{\delta} - \alpha\right].$$

E é a variável referente aos emprego, contudo na área da economia existe um medidor de emprego muito utilizado denominado "nivel real de emprego",que mede o número de empregados por oferta de trabalho.

Seja então o nivel real de emprego dado por v:

$$v = \frac{E}{n}. \tag{10}$$

Com o objetivo de compreender melhor este conceito económico analisemos o seguinte esquema:

$$\begin{cases} emprego > trabalho \rightarrow \text{v}>1 \\ emprego = trabalho \rightarrow \text{v}=1 \\ emprego < trabalho \rightarrow \text{v}<1 \end{cases}$$

Determinemos $\frac{dv}{dt}(t)$.
De (10), temos que:

$$\frac{dv}{dt}(t) = \frac{\frac{dE}{dt}(t)n - \beta n_0 e^{\beta t}E}{n^2} = \frac{E\frac{(1-u)}{\delta} - l\alpha - l\beta}{n} = vn\frac{\left[\frac{(1-u)}{\delta} - \alpha - \beta\right]}{n} = v\left[\frac{(1-u)}{\delta} - \alpha - \beta\right].$$

Pela suposição 6, podemos definir a variação dos salários da seguinte forma:

$$\frac{ds}{dt}(t) = s\left(\lambda v - \gamma\right). \tag{11}$$

Sabemos que:

$$u = \frac{s}{a}.$$

Então, temos que:

$$\frac{du}{dt}(t) = \frac{\frac{ds}{dt}(t)a - s\frac{da}{dt}(t)}{a^2}. \tag{12}$$

Sabemos que a, foi definida, para $\alpha > 0$, pela expressão:

$$a = a_0 e^{\alpha t} \Leftrightarrow \frac{da}{dt}(t) = \alpha a_0 e^{\alpha t}.$$

Então aplicando este resultado em (12), obtemos:

$$\frac{du}{dt}(t) = \frac{\frac{ds}{dt}(t)a - s\alpha a_0 e^{\alpha t}}{a^2}$$

Usando (11), na equação anterior vem:

$$\frac{du}{dt}(t) = \frac{s(\lambda v - \gamma) - \alpha s}{a} = \frac{au(\lambda v - \gamma - \alpha)}{a} = u(\lambda v - \gamma - \alpha).$$

Fazendo:

$$\eta_1 = \frac{1}{\delta} - (\alpha + \beta)$$

$$\eta_2 = \alpha + \gamma$$

$$\theta_1 = \frac{1}{\delta}$$

$$\theta_2 = \lambda$$

Obtemos assim o sistema relativo ao modelo salário-emprego de Goodwin:

$$\begin{cases} v'(t) = v(t)\left[\frac{1}{\delta} - \alpha - \beta - \frac{u(t)}{\delta}\right] \\ u'(t) = u(t)(\lambda v(t) - \gamma - \alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v'(t) = v(t)\left(\eta_1 - \theta_1 u(t)\right) \\ u'(t) = u(t)(\theta_2 v(t) - \eta_2) \end{cases} \tag{13}$$

Vemos assim que este modelo respeita as equações de Lotka-Volterra, e é evidentemente da forma do modelo (1).

Tendo em conta a correspondência de variáveis, sabemos que todos os resultados obtidos para as equções de Lotka-Volterra são igualmente válidos para o modelo de Goodwin.

2.3 Defeitos do modelo de Goodwin

O modelo de Goodwin apresenta algumas falhas, umas mais graves e relevantes que outras. Passamos a analisar algumas das mais relevantes, bem como a resolucionar essas irregularidades tentando assim melhorar o modelo, tornando-o mais realista.

O que acontece quando $v = 0$ ou $u = 0$?

Consideremos $v = 0$:

Ora, como

$$v = \frac{E}{n}.$$

Temos que

$$E = 0 \Rightarrow v = 0.$$

Também

$$n \to \infty \Rightarrow v = 0$$

Fazendo $v = 0$, vem da segunda linha do sistema (13) ,referente ao modelo de Goodwin, que: $u'(t) = -\eta_2 u(t)$. Primitivando ambos os lados da equação, vem que: $u(t) = u_0 e^{-\eta_2(t-t_0)}$, com $u_0 = u(t_0)$.

Calculemos usando a expressão de $u(t)$ o seguinte limite:

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = \lim_{t\to\infty} u_0 e^{-\eta_2(t-t_0)} = 0$$

Isto significa que quando $v = 0$, isto é, quando o número de empregagos é zero, $E = 0$, ou quando o trabalho, n , verifica $n \to \infty$ então também u será zero quando $t \to \infty$.

Podemos ver que este resultado realmente verifica o que seria de esperar na realidade, e não é nenhuma lacuna do modelo de Goodwin.

Consideremos agora $u = 0$:

Ora, como

$$u = \frac{s}{a}.$$

Temos que:

$$s = 0 \Rightarrow u = 0$$

Também:

$$a \to \infty \Rightarrow u = 0$$

Pela primeira equação do sistema (13) temos que:

$$v'(t) = v(t)\eta_1$$

Primitivando agora ambos os lados da equação anterior, vem que: $v(t) = v_0 e^{\eta_1(t-t_0)}$, com $v_0 = v(t_0)$.

Calculemos agora usando a expressão de $v(t)$ o seguinte limite:

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{t\to\infty} v_0 e^{\eta_1(t-t_0)} = +\infty.$$

No contexto do problema este resultado significa que quando os salários têm valor zero, $s = 0$,ou quando a produtividade no trabalho é muito grande $a \to \infty$ a variável v atinge valores ilimitados para $t \to \infty$.

Esta é uma das lacunas do modelo de Goodwin, pois na realidade isto significará que o numero de empregados,E, será muito superior ao trabalho n.

Para tornar o modelo mais realista, aproximando-o da realidade, para $u = 0$, devemos considerar

$$v'(t) = \eta_1 \left(1 - \frac{v}{K}\right) v \tag{14}$$

Assim, se quisermos considerar que no máximo o emprego é de 1, devemos fazer $K = 1$.

Obtemos assim o seguinte modelo:

$$\begin{cases} v'(t) = \eta_1 \left(1 - v(t)\right) v(t) - \theta_1 v(t) u(t) \\ u'(t) = u(t)(\theta_2 v(t) - \eta_2) \end{cases}$$

Passemos agora a resolver a equação (14), que é uma equação de variáveis separáveis e verifiquemos se o problema no modelo de Goodwin foi corrigido para $k = 1$. Temos então:

$$\frac{dv}{dt}(t) = \eta_1 \left(1 - \frac{v}{K}\right) v \Leftrightarrow \frac{1}{v - v^2} dv = \eta_1 dt \Leftrightarrow \int \frac{1}{v} - \frac{1}{v-1} dv = \int \eta_1 dt \tag{15}$$

Calculemos agora as primitivas de ambos os lados, ora temos:

$$\int \frac{1}{v} - \frac{1}{v-1} dv = ln|v| - ln|v-1| + c_1$$

$$\int \eta_1 dt = \eta_1 t + c_2$$

Substituindo estes dois resultados na equação (15), temos:

$$ln|v| - ln|v-1| + c_1 = \eta_1 t + c_2 \Leftrightarrow ln\left(\frac{v}{v-1}\right) = \eta_1 t + c_2 - c_1 \Leftrightarrow \frac{v}{v-1} = e^{\eta_1 t + c_3}$$

$$\Leftrightarrow v = e^{\eta_1 t + c_3}(v - 1) \Leftrightarrow v\left(1 - e^{\eta_1 t + c_3 t}\right) = -e^{\eta_1 t + c_3} \Leftrightarrow v(t) = \frac{-e^{\eta_1 t + c_3}}{1 - e^{\eta_1 t + c_3}}. \tag{16}$$

Em que $c_3 = c_2 - c_1$.

Para verificar se o problema está agora resolvido, calculemos o limite $v(t)$ quando $t \to \infty$,usando a igualdade (16).

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{-e^{\eta_1 t + c_3}}{1 - e^{\eta_1 t + c_3}} = \lim_{t\to\infty} \frac{-e^{\eta_1 t + c_3}}{e^{\eta_1 t + c_3}\left[\frac{1}{e^{\eta_1 t + c_3}} - 1\right]} = \lim_{t\to\infty} \frac{-1}{\frac{1}{e^{\eta_1 t + c_3 - 1}}} = \frac{-1}{-1} = 1.$$

Assim, verificamos que para $u = 0$ e para $t \to \infty$, teremos $v(t) \to 1$, portanto temos esta falha resolvida.

Relação salários-emprego:

Alterações em u provocadas por alterções em v não podem influenciar imediatamente o sistema. No modelo de Goodwin essas alterações são imediatas e posteriormente não se verifica nenhuma influência, e portanto para aproximar o modelo o máximo possivel à realidade queremos provocar um atraso na variação da variável u.

Podemos assim obter o pretendido substituindo na segunda equação do modelo:

$$v = \int_0^t v(\tau)G(t-\tau)d\tau$$

Onde G é uma função integrável positiva que verifica

$$\int_{-\infty}^t G(t-\tau)d\tau = \int_0^\infty G(x)dx = 1.$$

$$\begin{cases} v'(t) = \eta_1 \left(1 - v(t)\right) v(t) - \theta_1 v(t)u(t) \\ u'(t) = -\eta_2 u(t) + \theta_2 u(t) \int_0^t v(\tau)G(t-\tau)d\tau \end{cases}$$

Instabilidade do modelo

A instabilidade é um dos maiores problemas do modelo (13).

Pequenas alterações nas condições iniciais (u_0, v_0) conduzem a soluções demasiado diferentes.

Usando a função $G(x) = ae^{-ax}$, $a > 0$, conseguimos estabilizar as soluções e corrigir esse problema.

Esta função é decrescente, e fará com que uma alteração em v,uma nova contratação, um despedimento ou uma modificação na produtividade,influencie cada vez menos a variação da variável u com o passar do tempo.

Isto significa que é tido em conta alterações no lucro da empresa quando se celebra um novo contrato de trabalho.Assim, dado um periodo de tempo x, respetivo ao tempo que ocorreu esse contrato, a influência que terá no salário dos trabalhadores será cada vez menor com o passar do tempo ,devido à influência da função $G(x)$.

Provemos que:

$$\int_0^\infty G(x)dx = 1.$$

$$\int_0^\infty G(x)dx = \int_0^\infty ae^{-as}ds = -\left[e^{-a\times\infty} - e^0\right] = 1$$

Assim obtemos o seguinte modelo, que é uma melhoria do modelo de Goodwin:

$$\begin{cases} v'(t) = \eta_1 \left(1 - v(t)\right) v(t) - \theta_1 v(t)u(t) \\ u'(t) = -\eta_2 u(t) + \theta_2 u(t) \int_0^t v(\tau)ae^{-a(t-\tau)}d\tau \end{cases}$$

Este modelo é uma melhoria do modelo de Goodwin (13).

3 Referências Bibliográficas

Referências

[1] Martin Braun. *Differencial Equations and their Aplplications*. Springer-Verlag, 4.ª edição, 1983.

[2] Mafalda Almeida. *Master's Final work - The Lotka-Volterra equations in finance and economics*,2017.