PLANO DE AULA

Disciplina: Matemática A
Ano de escolaridade: 11º ano
Ano letivo: 2021/2022
Professor: Estagiário de Matemática
Espaço: Sala de Aula
Tema: Produto escalar (ou interno) de vetores
Tempo: Duas aulas de 90 min. (qualquer aula de 90 min. está pensada para poder ser dividida em duas aulas de 45 min. caso exista essa necessidade em termos de horário)

Sumário
• Relembrar algumas noções de Geometria (nomeadamente acerca de segmentos orientados e vetores e projeção ortogonal) • Produto escalar (ou interno) de vetores • Ângulo de vetores (e o caso particular de vetores perpendiculares) • Propriedades do produto escalar • Calcular produto escalar a partir das coordenadas dos vetores (com um referencial ortonormado previamente definido) • Estudo de exemplos (nomeadamente, recorrendo à plataforma GeoGebra) e resolução de exercícios

Temas Transversais
• Segmentos orientados e vetores • Trigonometria • Conceitos básicos de Geometria no Plano e no Espaço • Produto escalar de vetores • Ângulo entre vetores

Objetivos
Relembrem e esclareçam dúvidas acerca dos pré requisitos (ver 1º ponto do sumário e Estratégia/Desenvolvimento de aula) **Conheçam e apliquem** a definição de projeção ortogonal de um ponto sobre uma reta **Conheçam e apliquem** a definição de produto escalar entre vetores **Conheçam e apliquem** a definição de ângulo entre em vetores (e o caso particular desse ângulo ser reto) **Conheçam e apliquem** as propriedades do produto escalar a introduzir **Conheçam e apliquem** o cálculo do produto escalar a partir das coordenadas dos vetores no plano (respetivamente, no espaço) em que há um referencial ortonormado previamente definido

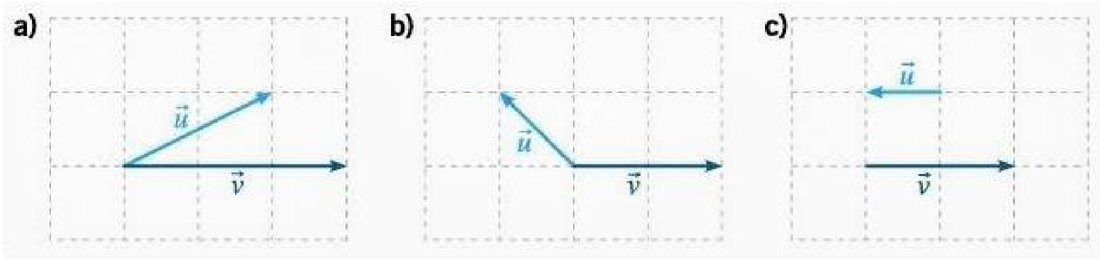
Materiais
• Material de escrita • Manual Dimensões Matemática A 11º Ano • Computador e videoprojetor, quadro interativo ou telemóveis dos alunos (para visualizar recursos presentes na plataforma GeoGebra - nomeadamente https://www.geogebra.org/m/czxsxvnf)

<table>
<tr><th>Tempo</th><th>Estratégia/Desenvolvimento de aula</th></tr>
<tr><td colspan="2">1ª Aula de 90 minutos (ou duas aulas de 45 minutos)</td></tr>
<tr><td>2 min.</td><td>Início de aula e verificação de presenças</td></tr>
<tr><td>10 min.</td><td>Relembramos alguns pré requisitos:
● Noções de segmentos orientados e de vetores.
● Quaisquer dois vetores admitem (sempre) dois representantes (isto é, dois segmentos orientados) complanares. Para vermos isso temos de considerar dois casos:
1. o caso em que um dos vetores é nulo e
2. o caso em que ambos os vetores são não nulos.
O caso 1) é trivial e por isso apenas nos debruçamos sobre o caso 2). Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores não nulos. Basta considerarmos um ponto arbitrário, O, e dois pontos P e Q tais que $\vec{OP} = \vec{u}$ e $\vec{OQ} = \vec{v}$, para termos o pretendido. Mais, as relações atrás podem ainda ser expressas da seguinte maneira: $P = O\vec{u}$ e $Q = O\vec{v}$.
● Projeção ortogonal de um ponto P sobre uma reta r é o ponto de interseção de r com a reta que passa em P e é perpendicular a r (isto é, é o pé da perpendicular do ponto P sobre a reta r).</td></tr>
<tr><td>35 min.</td><td>Definimos produto escalar (ou interno de vetores)
Suponhamos fixada uma unidade de medida de comprimento e sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores não nulos.
Consideremos um ponto arbitrário, O, dois pontos P e Q tais que $\vec{OP} = \vec{u}$ e $\vec{OQ} = \vec{v}$, e o ponto Q', a projeção ortogonal de Q na reta OP.
O produto escalar (ou interno) dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, que vamos representar por $\vec{u} \cdot \vec{v}$, é o número $\overline{OP} \times \overline{OQ'}$ ou o número $\overline{OP} \times \overline{OQ'}$ (respetivamente), consoante os vetores $\vec{OP}$ e $\vec{OQ'}$ tenham o mesmo sentido ou sentidos contrários (respetivamente). No caso de algum dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ ser o vetor nulo, o produto escalar é zero.
Notamos que, no caso do vetor $\vec{OQ'}$ ser o vetor nulo, tem-se que $\overline{OQ'} = 0$ e, portanto, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Observamos também que, neste caso, uma vez que o vetor $\vec{OQ}$ é não nulo, isso significa que os vetores $\vec{OP}$ e $\vec{OQ}$ são perpendiculares (por definição de projeção ortogonal do ponto Q sobre a reta OP).

Observamos que o termo "escalar" indica que o resultado desta operação (produto) entre vetores não é um vetor mas sim um número (escalar).

Ver apliqueta do GeoGebra em:
https://www.geogebra.org/m/czxsxvnf#material/qamyywry</td></tr>
</table>

Resolução de exercícios:
Dimensões 11, pág.141
Ex. 3 Considerando como unidade de comprimento o lado da quadrícula, determine $\vec{u} \cdot \vec{v}$.



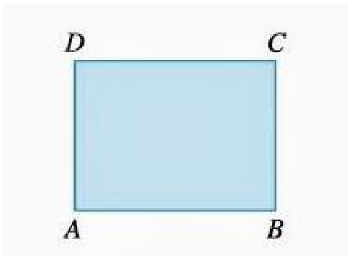
Resolução Ex. 3
Em todas as alíneas vamos considerar pontos O , P e Q tais que $\vec{u} = \vec{OP}$ e $\vec{v} = \vec{OQ}$ e vamos também considerar o ponto P' como sendo a projeção ortogonal do ponto P em OQ .

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{OP'} \times \overline{OQ} = 2 \times 3 = 6$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{OP'} \times \overline{OQ} = 2 \times 3 = 6$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{OP'} \times \overline{OQ} = 2 \times 3 = 6$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{OP'} \times \overline{OQ} = -1 \times 2 = -2$

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{OP'} \times \overline{OQ} = 2 \times 3 = 6$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{OP'} \times \overline{OQ} = -1 \times 2 = -2$

Dimensões 11, pág.141
Ex. 4 Considere o retângulo representado na seguinte figura:



Prove que $\vec{BA} \cdot \vec{BD} = \|\vec{AB}\|^2$

Resolução Ex. 4
A projeção ortogonal do ponto D na reta AB é o ponto A logo:

$\vec{BA} \cdot \vec{BD} = \overline{BA} \times \overline{BA} = \overline{BA}^2 = \overline{AB}^2 = \|\vec{AB}\|^2$

$$\vec{BA} \cdot \vec{BD} = \overline{BA} \times \overline{BA} = \overline{BA}^2 = \overline{AB}^2 = \|\vec{AB}\|^2$$

40 min.

Definimos ângulo entre vetores
Consideremos dois vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$. **O ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$** é qualquer ângulo convexo, nulo ou raso, AOB , em que A e B são pontos tais que $\vec{OA} = \vec{u}$ e $\vec{OB} = \vec{v}$. **A amplitude desse ângulo** também se designa por ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e representa-se por $(\hat{\vec{u}\vec{v}})$.

Importante:
- para identificar o ângulo entre dois vetores devemos considerar representantes desses vetores com a mesma origem.

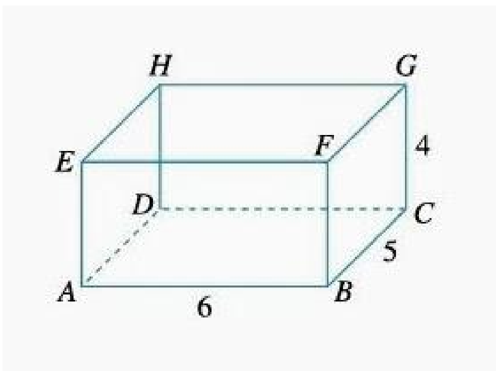
- O ângulo entre dois vetores não é um ângulo orientado, isto é, $(\widehat{\vec{u}\vec{v}}) = (\widehat{\vec{v}\vec{u}})$.

- A amplitude do ângulo entre dois vetores varia entre 0º (0 rad) - quando os vetores são colineares e têm o mesmo sentido - e 180º e (π rad) - quando os vetores são colineares e têm sentidos contrários.

Observamos que o caso em que (pelo menos) um dos vetores é nulo ficou por tratar.

Ver apliquetas do GeoGebra em:
https://www.geogebra.org/m/czxsxvnf#material/qus3dbtq
Na primeira das duas próximas apliquetas (Ângulo entre dois vetores não nulos V01), aparecem sempre dois ângulos relacionados com os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ mas, pelo que acabámos de ver, apenas um deles é o ângulo entre os dois vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$, $(\widehat{\vec{u}\vec{v}})$, e será sempre, para cada caso, o menor ângulo dos dois, pois apenas esse é nulo, convexo ou raso. Nesta apliqueta podemos arrastar qualquer dos extremos dos dois vetores (devendo evitar tornar qualquer dos vetores no vetor nulo - apenas porque essa situação não é considerada na matéria aqui abordada) para ver casos diferentes de ângulos entre os dois (tal como referido anteriormente, o ângulo entre os dois vetores será o menor dos dois ângulos que aparecem da apliqueta - garantindo assim que a sua amplitude está sempre entre 0º e 180º).
Na segunda apliqueta (Ângulo entre dois vetores não nulos V02), temos controlo sobre um seletor para vermos diferentes casos de ângulos entre dois vetores não nulos (notar que, aqui, os vetores têm as mesmas normas). Observamos que, controlando os seletores relacionados com os dois ângulos e escolhendo exatamente o mesmo valor para ambos, acabamos por obter "casos iguais" no sentido em que não temos nenhum referencial estabelecido e os ângulos entre dois vetores não são orientados.

TPC:
Dimensões 11, pág.141
Ex. 5 Na figura está representado um paralelepípedo retângulo, em que na unidade de comprimento fixada temos $\overline{AB} = 6, \overline{BC} = 5$ e $\overline{CG} = 4$.



Determine:
a) $\vec{AB} \cdot \vec{AF}$ $\vec{AB} \cdot \vec{AF}$
b) $\vec{AB} \cdot \vec{DC}$ $\vec{AB} \cdot \vec{DC}$
c) $\vec{FB} \cdot \vec{FG}$ $\vec{FB} \cdot \vec{FG}$
d) $\vec{AD} \cdot \vec{GF}$ $\vec{AD} \cdot \vec{GF}$

	Resolução Ex. 5 a) $\vec{AB} \cdot \vec{AF} = 6 \times 6 = 36$ $\vec{AB} \cdot \vec{AF} = 6 \times 6 = 36$ b) $\vec{AB} \cdot \vec{DC} = 6 \times 6 = 36$ $\vec{AB} \cdot \vec{DC} = 6 \times 6 = 36$ c) $\vec{FB} \cdot \vec{FG} = 4 \times 0 = 0$ $\vec{FB} \cdot \vec{FG} = 4 \times 0 = 0$ d) $\vec{AD} \cdot \vec{GF} = -5 \times 5 = -25$ $\vec{AD} \cdot \vec{GF} = -5 \times 5 = -25$
2ª Aula de 90 minutos (ou duas aulas de 45 minutos)	
2 min.	Início de aula e verificação de presenças
15 min.	**Esclarecimento de dúvidas** e **correção do T.P.C.**
25 min.	**Damos a proposição:** **Proposição:** Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores não nulos. Então $\vec{u} \cdot \vec{v} = \parallel \vec{u} \parallel \times \parallel \vec{v} \parallel \times \cos((\hat{\vec{u}\vec{v}}))$. **A demonstração está presente em baixo mas, caso o tempo o permita, deve antes ser explorada no GeoGebra**: https://www.geogebra.org/m/czxsxvnf#material/qus3dbtq **Demonstração** Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores não nulos e consideremos agora: O um ponto (fixo) qualquer, P e Q pontos tais que $\vec{OP} = \vec{u}$ e $\vec{OQ} = \vec{v}$ e Q' a projeção ortogonal de Q na reta OP. Para demonstrarmos o pretendido temos de analisar separadamente os seguintes casos: 1. $(\hat{\vec{u}\vec{v}}) = 0°$ 2. $(\hat{\vec{u}\vec{v}}) = 180°$ 3. $(\hat{\vec{u}\vec{v}}) = 90°$ 4. $0° < (\hat{\vec{u}\vec{v}}) < 90°$ 5. $90° < (\hat{\vec{u}\vec{v}}) < 180°$ Caso 1. Aqui os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares e têm o mesmo sentido, logo, $\vec{OQ'}$ e $\vec{OP}$ também (são colineares - óbvio pela definição de Q' e, por isso, em futuros casos não sentiremos a necessidade de o explicitar) têm o mesmo sentido, pois Q' coincide com Q. Então, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{OP} \times \overline{OQ'}$.

	Por outro lado temos que: • $\cos(\hat{\vec{u}\vec{v}}) = cos(0°) = 1$, • $\overline{OP} = \parallel \vec{u} \parallel$ e • $\overline{OQ} = \overline{OQ} = \parallel \vec{v} \parallel$ logo, temos o pretendido. Caso 2. Aqui os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares e têm sentidos contrários, logo, $\vec{OQ'}$ e $\vec{OP}$ também têm sentidos contrários, pois Q' coincide com Q. Então, $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\overline{OP} \times \overline{OQ'}$. Por outro lado temos que: • $\cos(\hat{\vec{u}\vec{v}}) = cos(180°) = -1$, • $\overline{OP} = \parallel \vec{u} \parallel$ e • $\overline{OQ} = \overline{OQ} = \parallel \vec{v} \parallel$, logo, temos o pretendido. Caso 3. Neste caso já vimos que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ (caso em que $\vec{OQ}$ é o vetor nulo - ver capítulo Produto escalar de vetores) e, como $\cos(\hat{\vec{u}\vec{v}}) = cos(90°) = 0$, temos o pretendido. Caso 4. Neste caso temos que $\overline{OP}$ e $\overline{OQ'}$ têm o mesmo sentido logo $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{OP} \times \overline{OQ'}$. Temos (que os ângulos POQ e $Q'OQ$ são iguais e) que o triângulo $[Q'OQ]$ é um triângulo retângulo em Q' e, então, $\cos(Q'\hat{O}Q) = \frac{\overline{OQ'}}{\overline{OQ}}$ logo $\overline{OQ'} = \overline{OQ} \times \cos(Q'\hat{O}Q)$ e, portanto, $\overline{OP} \times \overline{OQ'} = \overline{OP} \times \overline{OQ} \times \cos(Q'\hat{O}Q)$. Por outro lado temos que: • (como mencionado) $Q'\hat{O}Q = P\hat{O}Q = (\hat{\vec{u}\vec{v}})$ logo $\cos(\hat{\vec{u}\vec{v}}) = \cos(Q'\hat{O}Q)$, • $\overline{OP} = \parallel \vec{u} \parallel$ e • $\overline{OQ} = \parallel \vec{v} \parallel$, logo, temos o pretendido. Caso 5. Neste caso temos que $\overline{OP}$ e $\overline{OQ'}$ têm sentidos contrários logo $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\overline{OP} \times \overline{OQ'}$. Temos que os ângulos POQ e $Q'OQ$ são suplementares e que o triângulo $[Q'OQ]$ é um triângulo retângulo em Q'. Então $\cos(Q'\hat{O}Q) = \frac{\overline{OQ'}}{\overline{OQ}}$, logo $\overline{OQ'} = \overline{OQ} \times \cos(Q'\hat{O}Q)$, daí $\overline{OQ'} = \overline{OQ} \times \cos(180° - (P\hat{O}Q)$ e, portanto, $\overline{OQ'} = -\overline{OQ} \times \cos(P\hat{O}Q)$.

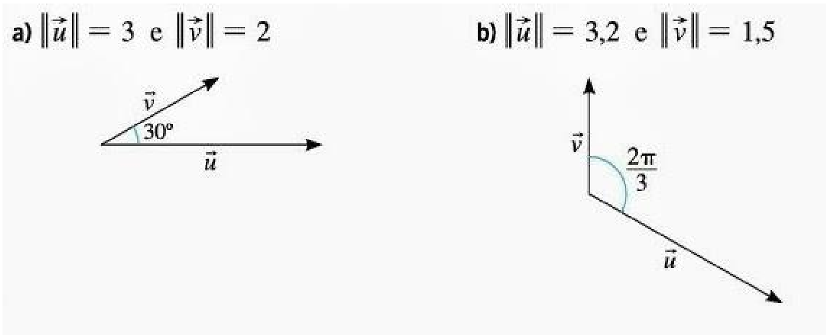
Por outro lado temos que:

- (como mencionado) $Q'\hat{O}Q = (180° - (P\hat{O}Q))$ e $(\hat{\vec{u}\vec{v}}) = P\hat{O}Q$ logo $\cos(\hat{\vec{u}\vec{v}}) = \cos(P\hat{O}Q)$,
- $\overline{OP} = \| \vec{u} \|$ e
- $\overline{OQ} = \| \vec{v} \|$,

logo, temos o pretendido.
A demonstração está terminada.

Definimos vetores perpendiculares:
Diz-se que dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são perpendiculares, e escrevemos $\vec{u} \perp \vec{v}$, se algum deles é o vetor nulo ou, se nenhum dos vetores é nulo, o ângulo entre os dois vetores é reto.

Resolução de exercícios:
Dimensões 11, pág.142
Ex. 6 Determine o produto escalar de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ em cada caso:



Resolução Ex. 6

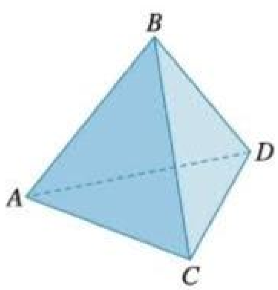
a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}^\wedge \vec{v}) = 3 \times 2 \times \cos 30° = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}^\wedge \vec{v}) = 3 \times 2 \times \cos 30° = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}^\wedge \vec{v}) = 3 \times 2 \times \cos 30° = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

$= 3,2 \times 1,5 \times (-0,5) = -2,4$ $= 3,2 \times 1,5 \times (-0,5) = -2,4$

Dimensões 11, pág.142
Ex. 8 Na figura está representado um tetraedro regular $[ABCD]$, em que $\overline{AB} = 5$.



Determine:

a) $\vec{AB}\cdot\vec{BC}$ $\vec{AB}\cdot\vec{BC}$

b) $\vec{AC}\cdot\vec{CA}$ $\vec{AC}\cdot\vec{CA}$

c) $\vec{AC}\cdot\vec{BD}$ $\vec{AC}\cdot\vec{BD}$

Resolução Ex. 8

a) $\vec{AB}\cdot\vec{BC}=5\times 5\times\cos 120^\circ=-\dfrac{25}{2}$ (com uma translação e sabendo que um ângulo interno de um triângulo equilátero tem 60° é fácil concluir que a amplitude de $(\vec{AB}\,\widehat{\ }\,\vec{BC})$ é $60^\circ+60^\circ=120^\circ$)

b) $\vec{AC}\cdot\vec{CA}=5\times 5\times\cos 180^\circ=-25$ $\vec{AC}\cdot\vec{CA}=5\times 5\times\cos 180^\circ=-25$

c) $\vec{AC}\cdot\vec{BD}=5\times 5\times\cos 90^\circ=0$ (com uma translação é fácil concluir que $\vec{AC}\perp\vec{BD}$)

Dimensões 11, pág.144

Ex. 12 Considere o triângulo $[ABC]$ cujos lados $[AB]$ e $[BC]$ medem 2 cm e 3 cm , respetivamente.

Sabendo que $\vec{AB}\cdot\vec{BC}=0$, determine:

a) $\overline{AC}$, justificando os procedimentos efetuados.

b) $\vec{AB}\cdot\vec{AC}$ $\vec{AB}\cdot\vec{AC}$

c) $A\hat{C}B$, arredondada às décimas de grau.

Resolução Ex. 12

a) Como $\vec{AB}\cdot\vec{BC}=0$, tem-se que $\vec{AB}\perp\vec{BC}$.

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2\Leftrightarrow\overline{AC}^2=2^2+3^2\Rightarrow\overline{AC}=\sqrt{13}\text{ cm}$

$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2\Leftrightarrow\overline{AC}^2=2^2+3^2\Rightarrow\overline{AC}=\sqrt{13}\text{ cm}$

b) Pela lei dos cossenos, temos:

$3^2=2^2+\sqrt{13}^2-2\times 2\times\sqrt{13}\cos(\vec{AB}\,\widehat{\ }\,\vec{AC})\Leftrightarrow$

$3^2=2^2+\sqrt{13}^2-2\times 2\times\sqrt{13}\cos(\vec{AB}\,\widehat{\ }\,\vec{AC})\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\cos(\vec{AB}\cdot\vec{AC})=\dfrac{2}{\sqrt{13}}=\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$ $\Leftrightarrow\cos(\vec{AB}\cdot\vec{AC})=\dfrac{2}{\sqrt{13}}=\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$

Portanto: $\vec{AB}\cdot\vec{BC}=\|\vec{AB}\|\|\vec{AC}\|\cos(\vec{AB}\,\widehat{\ }\,\vec{AC})=2\times\sqrt{13}\times\dfrac{2\sqrt{13}}{13}=4$

$\vec{AB}\cdot\vec{BC}=\|\vec{AB}\|\|\vec{AC}\|\cos(\vec{AB}\,\widehat{\ }\,\vec{AC})=2\times\sqrt{13}\times\dfrac{2\sqrt{13}}{13}=4$

c) $\cos(\vec{AB}\,\widehat{\ }\,\vec{AC})=\dfrac{2\sqrt{13}}{13}\Rightarrow B\hat{A}C\approx 56,3^\circ$ e $A\hat{C}B=180^\circ-90-56,3\approx 33,7^\circ$

$A\hat{C}B=180^\circ-90-56,3\approx 33,7^\circ$

ou

$$A\hat{C}B = 180° - 90 - \arccos(\vec{AB}\,^\wedge\,\vec{AC}) \approx 33,7°$$

$$A\hat{C}B = 180° - 90 - \arccos(\vec{AB}\,^\wedge\,\vec{AC}) \approx 33,7°$$

(nesta hipótese de resolução referir que ainda não foi estudada a função inversa do cosseno mas que o que aqui se faz é o "procedimento habitual de calculadora" para obter o ângulo cujo cosseno é um determinado valor - neste caso, o valor $\frac{2\sqrt{13}}{13}$)

Dimensões 11, pág.144

Ex. 13 Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores tais que:

- $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 2$ $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 2$
- $(\vec{u}\,^\wedge\,\vec{v}) = 120°$ $(\vec{u}\,^\wedge\,\vec{v}) = 120°$

Determine:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ $\vec{u} \cdot \vec{v}$

b) $\vec{u} \cdot \vec{u}$ $\vec{u} \cdot \vec{u}$

c) $\vec{v} \cdot (-3\vec{v})$ $\vec{v} \cdot (-3\vec{v})$

Resolução Ex. 13

a) $$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(\vec{u}\,^\wedge\,\vec{v}) = 3 \times 2 \times \cos 30° = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(\vec{u}\,^\wedge\,\vec{v}) = 2 \times 2 \times \cos 120° = 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$$

b) $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = 2^2 = 4$ $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = 2^2 = 4$

c) $$\vec{v} \cdot (-3\vec{v}) = \|\vec{v}\| \times \|-3\vec{v}\| \times \cos(\vec{v}\,^\wedge(-3\vec{v})) = 2 \times 6 \times \cos 180° = -12$$

$$\vec{v} \cdot (-3\vec{v}) = \|\vec{v}\| \times \|-3\vec{v}\| \times \cos(\vec{v}\,^\wedge(-3\vec{v})) = 2 \times 6 \times \cos 180° = -12$$

20 min.

Vemos agora algumas propriedades do produto escalar:

Propriedade 1

Dado um vetor $\vec{u}$ temos: $\vec{u}$ temos:

$\vec{u} \cdot \vec{u} = \| \vec{u} \|^2$. $\vec{u} \cdot \vec{u} = \| \vec{u} \|^2$.

Demonstração

Consideremos um vetor $\vec{u}$. $\vec{u}$.

Se $\vec{u} = \vec{0}$ então $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ e $\| \vec{u} \|^2 = 0$ e temos o pretendido. $\vec{u} = \vec{0}$ então $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ e $\| \vec{u} \|^2 = 0$ e temos o pretendido.

Se $\vec{u} \neq \vec{0}$ então $\vec{u} \cdot \vec{u} = \| \vec{u} \| \times \| \vec{u} \| \times \cos(\hat{\vec{u}\vec{u}}) = \| \vec{u} \|^2 \times \cos(0°) =$ $= \| \vec{u} \|^2 \times 1 = \| \vec{u} \|^2$ e temos o pretendido. $\vec{u} \neq \vec{0}$ então $\vec{u} \cdot \vec{u} = \| \vec{u} \| \times \| \vec{u} \| \times \cos(\hat{\vec{u}\vec{u}}) = \| \vec{u} \|^2 \times \cos(0°) =$ $= \| \vec{u} \|^2 \times 1 = \| \vec{u} \|^2$ e temos o pretendido.

	Propriedade 2 Dados vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ temos:$\vec{u}$ e $\vec{v}$ temos: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (propriedade comutativa).$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (propriedade comutativa). **Demonstração** Consideremos dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.$\vec{u}$ e $\vec{v}$. Se algum dos vetores for o vetor nulo então $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} = 0$ e temos o pretendido. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} = 0$ e temos o pretendido. Se nenhum dos vetores for o vetor nulo então $\vec{u} \cdot \vec{v} = \| \vec{u} \| \times \| \vec{v} \| \times \cos((\widehat{\vec{u}\vec{v}}))$ e temos o pretendido. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \| \vec{u} \| \times \| \vec{v} \| \times \cos(\widehat{\vec{u}\vec{v}}) = \| \vec{v} \| \times \| \vec{u} \| \times \cos(\widehat{\vec{v}\vec{u}}) = \vec{v} \cdot \vec{u}$ **Propriedade 3** Dados vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e dado um número real λ temos: $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$ (propriedade associativa mista). **Propriedade 4** Dados vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ temos: $\vec{w} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{v}$ (propriedade distributiva). **As demonstrações destas propriedades 3 e 4 são opcionais** mas, aos alunos interessados (ou em aula - se houver tempo nesta ou numa próxima aula onde se aprofundem os conhecimentos acerca do produto escalar), **deixamos uma demonstração geométrica desta propriedade disponível no GeoGebra:** https://www.geogebra.org/m/czxsxvnf#material/nxk3shff
25 min.	**Vemos como o produto escalar de vetores pode ser expresso em termos de coordenadas (primeiro no plano e depois no espaço).** **Primeiro necessitamos de fixar um referencial ortonormado no plano,** xOy **.** **Proposição** Sejam $\vec{u}(u_1, u_2)$ e $\vec{v}(v_1, v_2)$ dois vetores do plano (com coordenadas no referencial ortonormado que tomámos). Então $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \times v_1 + u_2 \times v_2$. **Demonstração** Em primeiro lugar, é imediato concluir que: • $\vec{e_1} \cdot \vec{e_1} = 1$ pois $\vec{e_1} \cdot \vec{e_1} = \| \vec{e_1} \|^2$ e $\vec{e_2} \cdot \vec{e_2} = 1$ pois $\vec{e_2} \cdot \vec{e_2} = \| \vec{e_2} \|^2$; • $\vec{e_1} \cdot \vec{e_2} = 0$, pois $\vec{e_1} \perp \vec{e_2}$.

Então
$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1\vec{e_1} + u_2\vec{e_2}) \cdot (v_1\vec{e_1} + v_2\vec{e_2}) =$
$= (u_1\vec{e_1}) \cdot (v_1\vec{e_1}) + (u_1\vec{e_1}) \cdot (v_2\vec{e_2}) + (u_2\vec{e_2}) \cdot (v_1\vec{e_1}) + (u_2\vec{e_2}) \cdot (v_2\vec{e_2}) =$
$= u_1v_1(\vec{e_1} \cdot \vec{e_1}) + u_1v_2(\vec{e_1} \cdot \vec{e_2}) + u_2v_1(\vec{e_2} \cdot \vec{e_1}) + u_2v_2(\vec{e_2} \cdot \vec{e_2}) =$
$= u_1v_1 \times 1 + u_1v_2 \times 0 + u_2v_1 \times 0 + u_2v_2 \times 1 =$
$= u_1v_1 + u_2v_2$
Temos o pretendido demonstrado.

Se fixarmos um referencial ortonormado no espaço, $Oxyz$, de modo análogo se reconhece que:

Proposição
Sejam $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ dois vetores do espaço (com coordenadas no referencial ortonormado que tomámos).
Então $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \times v_1 + u_2 \times v_2 + u_3 \times v_3$.

Resolução de exercícios:
Dimensões 11, pág.144
Ex. 15 Determine, em cada alínea, o produto escalar dos vetores cujas coordenadas, num referencial o.n. do plano, são:
a) $\vec{u}(2, -3)$ e $\vec{v}(1, -2)$
b) $\vec{u}(3, -1)$ e $\vec{v}(1, 3)$
c) $\vec{u}(1, 1)$ e $\vec{v}(2, 2)$

Resolução Ex. 15
a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 1 + (-3) \times (-2) = 2 + 6 = 8$
b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 1 + (-1) \times 3 = 3 - 3 = 0$
c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 2 + 1 \times 2 = 2 + 2 = 4$

Dimensões 11, pág.144
Ex. 16 Num referencial o.n. do plano, considere os vetores $\vec{u}(7, -2)$ e $\vec{v}(m, 6)$, em que m é um número real.
Determine o valor de m, de modo que:
a) $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam perpendiculares.
b) $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam colineares.
c) $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$

Resolução Ex. 16

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow 7m+(-2)\times 6=0 \Leftrightarrow 7m=12 \Leftrightarrow m=\dfrac{12}{7}$

b)

$(m,6)=k(7,-2), k\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m=7k \\ 6=-2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=7\times(-3) \\ k=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-21 \\ k=-3 \end{cases}$

c)

$\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\| \Leftrightarrow \sqrt{7^2+(-2)^2}=\sqrt{m^2+6^2} \Leftarrow 53=m^2+36 \Leftrightarrow m^2=17 \Leftrightarrow m=\pm\sqrt{17}$

Caso exista tempo no final da resolução destes exercício, aproveitá-lo para rever e organizar os conhecimentos e procedimentos vistos neste bloco de aulas (eventualmente aproveitando o resumo do final de capítulo do manual - aproveitando-o como estrutura e, se necessário, completando-o e/ou adaptando-o) e procurar exercícios adicionais no manual para futuras explorações.

TPC:
Dimensões 11, pág.143
Ex. 9 Na figura está representado um paralelogramo, em que $\overline{AD}=3$ e $\overline{AB}=5$.
Determine:
a) $\vec{AB}\cdot\vec{AD}$
b) $\vec{AB}\cdot\vec{BC}$
c) $\vec{DC}\cdot(\vec{AB}+\vec{AB})$
d) $\vec{CB}\cdot(\vec{AB}+\vec{BD})$

Resolução Ex. 9

a) $\vec{AB}\cdot\vec{AD}=\|\vec{AB}\|\|\vec{AD}\|\cos(\vec{AB}^\wedge\vec{AD})=5\times 3\times\cos 30^\circ=\dfrac{15\sqrt{3}}{2}$

b) $\vec{AB}\cdot\vec{BC}=5\times 3\times\cos 30^\circ=\dfrac{15\sqrt{3}}{2}$

c) $\vec{DC}\cdot(\vec{AB}+\vec{AB})=\|\vec{DC}\|\|2\vec{AB}\|\cos(\vec{DC}^\wedge\vec{AB})=5\times 10\times\cos 0^\circ=50$

d) $\vec{CB}\cdot(\vec{AB}+\vec{BD})=\vec{CB}\cdot\vec{AD}=3\times 3\times\cos 180^\circ=-9$

Dimensões 11, pág.144
Ex. 13 Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores tais que:
- $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|=2$
- $(\vec{u}^\wedge\vec{v})=120^\circ$

Determine:
a) $\vec{u}\cdot\vec{v}$
b) $\vec{u}\cdot\vec{u}$
c) $\vec{v}\cdot(-3\vec{v})$

Resolução Ex. 13

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u} \hat{} \vec{v}) = 2 \times 2 \times \cos 120^\circ = 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$

b) $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = 2^2 = 4$

c) $\vec{v} \cdot (-3\vec{v}) = \|\vec{v}\| \times \| -3\vec{v}\| \times \cos(\vec{v} \hat{} (-3\vec{v})) = 2 \times 6 \times \cos 180^\circ = -12$

Dimensões 11, pág.144

Ex. 17 Num referencial o.n. do plano, considere os vetores $\vec{u}(8, -6)$ e $\vec{v}(m, 3)$, em que m é um número real.

Determine o valor de m, de modo que $(\vec{u} \hat{} \vec{v}) = 60^\circ$.

Resolução Ex. 17

$\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u} \hat{} \vec{v}) = u_1 v_1 + u_2 v_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{8^2 + (-6)^2}\right) \left(\sqrt{m^2 + 3^2}\right) \cos 60^\circ = 8m - 18 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{(8^2 + (-6)^2)(m^2 + 3^2)}}{2} = 8m - 18 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{100m^2 + 900}}{2} = 8m - 18 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{100m^2 + 900}{4} = (8m - 18)^2 \Leftrightarrow 25m^2 + 225 = 64m^2 - 288m + 324 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 39m^2 - 288m + 99 = 0 \Leftrightarrow 13m^2 - 96m + 33 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m = \frac{96 \pm \sqrt{(-96)^2 - 4 \times 13 \times 33}}{2(13)} \Leftrightarrow m = \frac{96 \pm \sqrt{7500}}{26} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m = \frac{96 \pm 50\sqrt{3}}{26} \Leftrightarrow m = \frac{48 + 25\sqrt{3}}{13} \vee m = \frac{48 - 25\sqrt{3}}{13}$

$\text{Como } 8 \times \frac{48 - 25\sqrt{3}}{13} - 18 < 0 \text{ e } 8 \times \frac{48 + 25\sqrt{3}}{13} - 18 > 0$

$m = \frac{48 + 25\sqrt{3}}{13}$

(pois sabemos que o resultado do produto escalar tem de ser positivo uma vez que o ângulo entre os vetores é agudo)

Anotações

Estes próximos dois quadros (Instrumentos de Avaliação) não são parte integrante deste Plano de Aula, são apenas hipóteses a aplicar, caso se sinta essa necessidade e exista disponibilidade de tempo de aula e dos aluno (só necessárias no segundo quadro), e ficam sobretudo como exemplos a implementar em outras aulas em que sejam de maior pertinência:

Instrumentos de Avaliação
Quadro I – Quadro de Referência de Trabalho Individual em Sala de Aula

Objeto de Avaliação	Referentes	Critérios	Indicadores	Instrumento para recolha de evidências
Trabalho Individual desenvolvido pelos alunos de uma turma. **Objetivos:** Os alunos devem: - Participar de forma pertinente; - Saber argumentar e refutar de forma fundamentada; - Ser autónomos; - Interpretar, analisar e criticar os dados tratados em exemplos e obtidos em exercícios; - Saber o que são segmentos orientados e vetores - Saber o que o que é a projeção ortogonal de um ponto sobre uma reta e saber aplicar - Saber o que o que é o produto escalar entre vetores e saber aplicar - Saber o que o que é o ângulo entre vetores e saber aplicar - Conhecer as propriedades do produto escalar e saber aplicá-las - Saber calcular o produto escalar a partir das coordenadas dos vetores (com um referencial ortonormado previamente definido) e saber aplicar - Saber relacionar “as noções anteriores” e aplicá-las a exercícios que requerem a ligação de várias “dessas noções”	**Internos:** -Critérios de avaliação considerados no AE -Experiências variadas de TI e de avaliação do trabalho desenvolvido **Externos:** -Livros, capítulos e artigos sobre a avaliação do trabalho de grupo (Alves, 2004; Figari, 1996; Hadji, 1994).	Participação Adequada	Dá as suas opiniões	Observação durante as aulas, análise dos T.P.C’s realizados (e, caso seja realizada, análise da ficha de auto e hétero avaliação (cf. Quadro II))
			Respeita as opiniões dos colegas	
			Coloca questões	
			Dá sugestões	
		Espírito Crítico	Analisa os factos de forma crítica	
			Fundamenta e defende as suas opiniões	
			Questiona e refuta as opiniões dos colegas, de forma respeitadora e construtiva	
		Autonomia	Realiza os exercícios propostos de forma autónoma a partir de orientações dadas	
			Tem capacidade de tomar decisões por si próprio	
		Saber Científico	Saber o que são segmentos orientados e vetores	
			Saber o que o que é a projeção ortogonal de um ponto sobre uma reta	
			Saber o que o que é o produto escalar entre vetores	
			Saber o que o que é o ângulo entre vetores	
			Conhecer as propriedades do produto escalar	
			Saber calcular o produto escalar a partir das coordenadas dos vetores (com um referencial ortonormado previamente definido)	
		Resolução de Problemas	Interpreta, analisa e critica os dados fornecidos Saber relacionar os vários conhecimentos e procedimentos aprendidos com os dados Sabe aplicar os vários conhecimentos e procedimentos aprendidos para chegar a uma resolução do exercício (fazendo-o, se necessário, depois de dividir/analisar o exercício em vários casos/passos e depois sintetizando-os para chegar à solução final)	

Quadro II - Quadro de observação para avaliar o Trabalho Individual (LEGENDA: S - sempre, F - frequentemente, R - raramente, N - Nunca)

Turma ____________

Nome ____

Data ______________________________

Itens a Avaliar	**Autoavaliação** (o que penso de mim)				**Heteroavaliação** (o que os outros pensam de mim)			
	S	F	R	N	S	F	R	N
Dei as minhas opiniões								
Respeitei as opiniões dos colegas								
Coloquei questões adequadas								
Dei sugestões para o trabalho								
Analisei os factos de forma crítica								
Fundamentei e defendi as minhas opiniões								
Questionei e refutei as opiniões dos colegas, de forma respeitadora e construtiva								
Realizei os exercícios propostas de forma autónoma a partir das orientações dadas								
Tenho capacidade de tomar decisões sozinho								
Sei interpretar os dados que me são fornecidos								
Analiso e crítico os dados fornecidos								
Sei o que são segmentos orientados e vetores								
Sei o que o que é a projeção ortogonal de um ponto sobre uma reta e sei aplicar								
Sei o que o que é o produto escalar entre vetores e sei aplicar								
Sei o que o que é o ângulo entre vetores e sei aplicar								
Conheço as propriedades do produto escalar e sei aplicá-las								
Sei calcular o produto escalar a partir das coordenadas dos vetores (com um referencial ortonormado previamente definido) e sei aplicar								
Sei relacionar as noções anteriores e aplicá-las a exercícios que requerem a ligação de várias dessas noções								