Liga Delfos Júnior–Primeira Prova

27 janeiro de 2014

Escola Básica Grão Vasco – Viseu

- A prova tem duração de 90 minutos.
- O material permitido é apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.
- A prova é composta por 4 questões e termina com a palavra FIM.
- A prova é cotada para 30 pontos.
- No cálculo da pontuação da equipa tem-se em consideração as respetivas respostas, a sua apresentação e simplicidade das mesmas.
- As equipas devem entregar a folha de resposta contendo o nome da equipa em todas as folhas.

Tema da Prova: Os Números de Fibonacci

Leonardo de Pisa, mais conhecido por Fibonacci, nasceu em Pisa, Itália, por volta do ano 1175. Durante a sua infância, teve contacto com comerciantes de diversas culturas da região mediterrânea, onde aprendeu técnicas matemáticas desconhecidas no ocidente. Mais tarde, viajou ao longo do Mediterrâneo, absorvendo conhecimento matemático do mundo islâmico.

Em 1200, Fibonacci regressa à sua cidade natal e em 1202, aos 27 anos, publicou o que havia aprendido na sua obra mais famosa, o livro *"Liber Abaci"*. Depois de 1228 não se conhece praticamente nada sobre a vida de Fibonacci, exceto o decreto da República de Pisa em 1240 que lhe deu o título de *"Discretus et sapiens magister Leonardo Bigollo"* em reconhecimento do grande progresso que trouxe para a matemática. Fibonacci morreu algum tempo depois, não se sabe exatamente o ano, estima-se entre 1240 a 1250, provavelmente em Pisa.

Fibonacci

Questão 1.

Considerem um quadrado com medida de lado igual a uma unidade e a sucessão (F_n), de termo geral F_n, obtida tal como se descreve (ver Figura 1):

- A medida do lado do quadrado é o primeiro termo da sucessão: $F_1 = 1$.
- Justapondo um quadrado igual ao anterior, obtém-se um retângulo cujas medidas dos lados são 1 e 2. A medida do menor lado deste retângulo é o segundo termo da sucessão: $F_2 = 1$.
- Um novo retângulo é construído justapondo ao anterior um quadrado de lado igual ao maior lado do retângulo anterior. A medida do menor lado deste retângulo é o terceiro termo da sucessão: $F_3 = 2$.
- Repetindo o processo, obtém-se a sucessão de retângulos (Retângulos de Fibonacci– Figura 1), em que as medidas dos menores lados de cada um dos retângulos correspondem aos termos da sucessão (F_n).

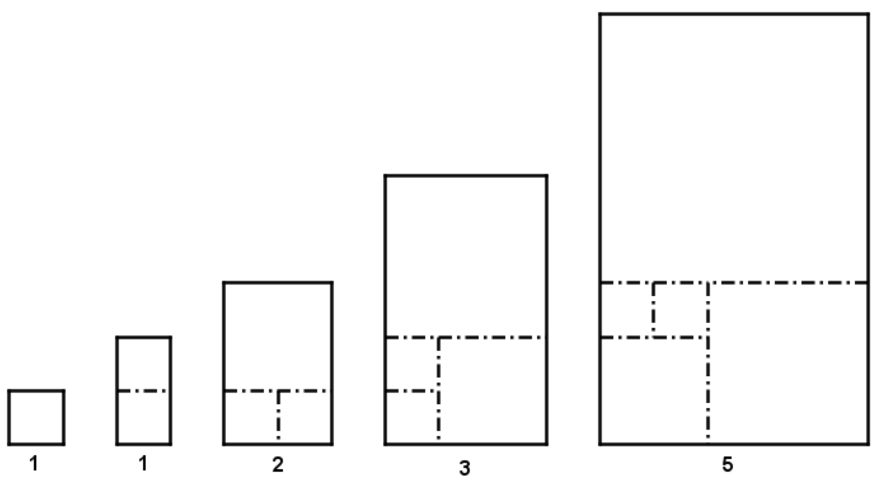

Figura 1: Retângulos de Fibonacci

A sucessão (F_n), é conhecida na literatura por Sucessão de Fibonacci e os seus termos são os Números de Fibonacci.

Determinem a medida do perímetro correspondente ao 6º Retângulo de Fibonacci.

Questão 2.

Partindo da sucessão de retângulos da Questão 1, construiu-se uma espiral (conhecida na literatura, por Espiral de Fibonacci), através da construção sucessiva de arcos (quartos) de circunferência, tal como sugere a Figura 2.

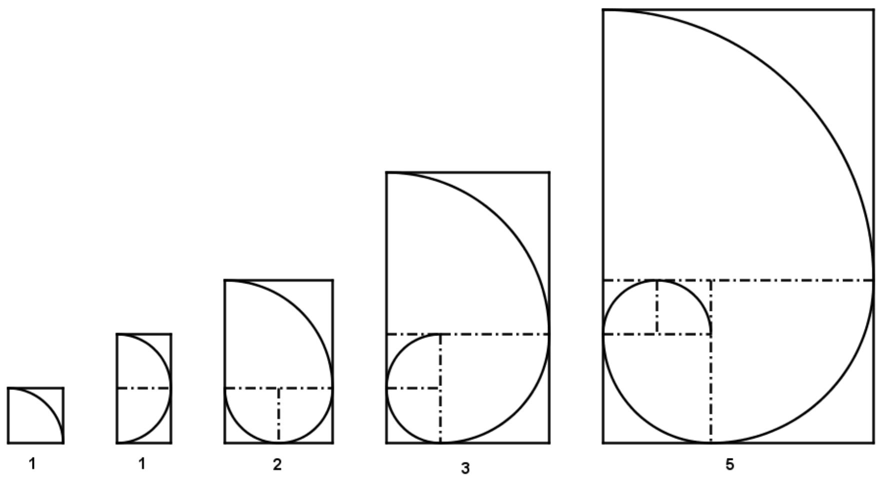

Figura 2: Construção da Espiral de Fibonacci

A Espiral de Fibonacci, assim construída, expressa movimento, uma vez que se prolonga até ao infinito. Notem que os raios dos quartos de circunferência correspondem aos termos da sucessão de Fibonacci.

Considerem a espiral $\mathcal{E}$ em que o último arco desenhado tem medida de comprimento 4π.
Qual a medida de comprimento da espiral $\mathcal{E}$? Justifiquem convenientemente a vossa resposta.

Questão 3.

Considerem um código secreto, em que cada letra corresponde a um número de Fibonacci com um, dois ou três algarismos. Tendo em conta que o código que corresponde à letra *D* é *13*; à letra *G* é *610* e que a frase *DESCOBRE NA LIGA DELFOS* está codificada por

1321834552121 144377 53610377 13215233558,

codifiquem a palavra *FIBONACCI*.

Questão 4.

Os números de Fibonacci podem ser definidos por recorrência em que cada termo, com exceção dos dois primeiros termos, é a soma dos dois termos que o precedem, isto é,

$$F_1 = F_2 = 1$$
$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ n = 3, 4, 5, \dots\ .$$

Assim,

$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2;$

$F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3;$

$F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5;$

...

São inúmeras as propriedades matemáticas que os números de Fibonacci satisfazem.
Seguidamente são apresentadas duas dessas propriedades.

Propriedade 1:

Dados dois números inteiros positivos m e n, o número de Fibonacci F_m divide o número de Fibonacci $F_{m\times n}$.

Propriedade 2:

Dados dois números inteiros positivos m e n, o máximo divisor comum dos números de Fibonacci F_m e F_n coincide com o número de Fibonacci F_d, onde d é o máximo divisor comum entre m e n. Isto é, $m.d.c\,(F_m, F_n) = F_{m.d.c(m,n)}$.

Tendo em conta a Propriedade 1, justifiquem que o número de Fibonacci F_{111} é par; e, tendo em conta a Propriedade 2, justifiquem que os números de Fibonacci F_{15} e F_{28} são números primos entre si.

FIM

– Núcleo de Estágio da Escola Básica Grão Vasco (Viseu).