Notas de

Matemática Discreta: Enumeração

http://www.mat.uc.pt/ oazenhas/teatching.html

Olga Azenhas
Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade de Coimbra

2024

ÍNDICE

1 Princípios elementares de contagem **1**
1.1 Regra da Soma 1
1.1.1 Relacão de recorrência de Pascal 2
1.2 Regra do produto 3
1.3 Princípio generalizado da multiplicação 6
1.4 Princípio da bijecção 7
1.5 Princípio de contar de duas maneiras 8
1.6 Permutações 10
1.7 Arranjos com repetição 11
1.8 Arranjos sem repetição 11
1.9 Combinações simples 12
1.10 Fórmula para as combinações simples 13

2 Teorema binomial **15**
2.1 Função geradora de $2^{[n]}$ 15
2.2 Função geradora de $2^{[n]}$ com respeito ao cardinal (peso), teorema binomial e coeficientes binomiais 16
2.3 Algumas identidades binomiais e o rectângulo de Pascal 17
2.3.1 Soma alternada dos coeficientes binomiais de uma linha do rectângulo de Pascal 18
2.3.2 Soma da coluna k do rectângulo de Pascal 18
2.3.3 Derivando 19
2.4 Teorema binomial (generalizado) 20
2.5 A identidade de Vandermonde 21
2.5.1 Mais exemplos de contar de duas maneiras 23
2.6 Caminhos numa grelha 24

3 Princípio da inclusão exclusão **27**

3.1 Aplicações 30

3.1.1 Contar funções sobrejectivas entre conjuntos finitos: uma fórmula . . 30

3.1.2 Outro exemplo 32

3.1.3 Outra formulação 33

3.2 Desencontros e Encontros 33

3.2.1 Desencontros 33

3.2.2 Encontros 34

4 Bolas em caixas **37**

4.1 Bolas distintas em caixas distintas: funcões 37

4.1.1 Funções injectivas/colocar no máximo uma bola por caixa 37

4.1.2 Bolas distintas em caixas distintas sem caixas vazias: funções sobrejectivas 38

4.2 Bolas distintas em caixas iguais: Números de Stirling de segunda espécie . . 39

4.2.1 Uma fórmula para os números de Stirling de segunda espécie e funções sobrejectivas 40

4.2.2 Números de Stirling (segunda espécie): algumas fórmulas 41

4.2.3 Números de Stirling (segunda espécie): uma relação de recorrência . 41

4.2.4 Números de Stirling de segunda espécie e contar funções entre conjuntos finitos 43

4.3 Bolas iguais em caixas distintas 44

4.3.1 Composições 44

4.3.2 Composições fracas 45

4.3.3 Contar soluções em inteiros não negativos de equações lineares diofantinas 46

4.3.4 Bolas iguais em caixas distintas e palavras binárias 47

4.3.5 Combinações com repetição 47

4.3.6 Multiconjuntos 48

4.3.7 Revisão 50

4.3.8 Função geradora dos multiconjuntos de $[n]$ 51

4.3.9 Reciprocidade combinatorial 52

4.3.10 Combinações com repetição condicionada 53

4.4 Permutações de multiconjuntos. Teorema multinomial 55

4.4.1 Coeficiente multinomial 55

4.4.2 Permutações com repetição ou permutações de um multiconjunto . . 57

4.4.3 Teorema multinomial. 58

4.4.4 Partições (ordenadas) de conjuntos, funções e coeficientes multinomiais 60

4.5 Bolas iguais em caixas iguais . . . 61
4.5.1 Partições de números . . . 61
4.5.2 Relações de recorrência . . . 62
4.5.3 Diagramas de Ferrers ou Young . . . 65
4.5.4 Diagrama de Young e partição conjugada . . . 66
4.5.5 Partições auto-conjugadas . . . 68
4.5.6 Função geradora de todas as partições com partes $\leq k$ . . . 69

5 Aspectos enumerativos do grupo simétrico 71
5.1 Permutações de um conjunto finito . . . 71
5.2 Grupo simétrico de ordem n . . . 72
5.3 Ciclos e decomposição cíclica . . . 73
5.3.1 Forma canónica da decomposição cíclica . . . 76
5.4 Tipo de uma permutação . . . 76
5.5 Fórmula para o número de permutações de um dado tipo . . . 77
5.6 Relação de recorrência e número de Stirling de primeira espécie . . . 78
5.7 Números de Stirling de primeira e segunda espécie . . . 80
5.8 Aplicação: Permutações conjugadas . . . 81
5.9 Inversões de uma permutação de $\mathfrak{S}_n$ . . . 82
5.9.1 Função geradora do número de permutações de $\mathfrak{S}_n$ com respeito ao número de inversões . . . 83
5.10 Sinal de uma permutação de $\mathfrak{S}_n$ . . . 83
5.10.1 Sinal de uma permutação e decomposição cíclica . . . 84

6 Referências 85

7 Folhas de Problemas 87
7.1 Folha1 . . . 87
7.2 Folha 2 . . . 91
7.3 Folha 3 . . . 98
7.4 Enunciados, Frequências e Exames resolvidos . . . 102

CAPÍTULO 1

PRINCÍPIOS ELEMENTARES DE CONTAGEM

1.1 Regra da Soma

Se S é um conjunto finito, $|S|$ denota o cardinal de S.

Regra da soma. *Se* $S = S_1 \sqcup \cdots \sqcup S_t$ *é a união disjunta dos conjuntos finitos* S_i, $i = 1, \ldots, t$, *então* $|S| = |S_1 \sqcup \cdots \sqcup S_t| = \sum_{i=1}^{t} |S_i|$.

Nota 1.1. Se $|S_1| = |S_2| = \ldots = |S_t| = m$ então $|S| = tm$.

Sejam $n, k \geq 0$ inteiros. Dado um conjunto X com n elementos, consideremos todos os seus subconjuntos com k elementos. Quantos são?

Definição 1.1. Dados os inteiros não negativos $n, k \geq 0$, definimos o número

$$\binom{n}{k} := \text{ número de subconjuntos com } k \text{ elementos}$$
$$\text{de um conjunto com } n \text{ elementos.}$$

Este número é dito coeficiente binomial de n sobre k como veremos mais adiante, ou combinação simples de n a k.

Em particular, $\binom{n}{k} = 0$, se $k > n$, e $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, para todo o $n \geq 0$.
Se $k = 0$, como só há um conjunto vazio, $\binom{n}{0} = 1$.
Se $k = 1$ ou $k = n - 1$, $\binom{n}{1} = n = \binom{n}{n-1}$.

Alguma terminologia :
O número $\displaystyle\binom{n}{k}$ lê-se habitualmente:

- número de conjuntos com k elementos de um conjunto de n elementos; ou

- combinações de n elementos, k a k; ou
- n, k a k; ou
- coeficiente binomial de n sobre k.

Dado $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ escreveremos abreviadamente muitas vezes $[n] := \{1, \ldots, n\}$ onde $[0] = \emptyset$.

1.1.1 Relacão de recorrência de Pascal

Vamos provar que a *regra da soma* produz a relação recorrência de Pascal dos coeficientes binomiais.

Proposição 1.1.
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \quad n \geq k \geq 1,$$
com a condição inicial $\binom{n}{0} = 1$, $n \geq 0$.

Nota 1.2. A relação anterior é trivial para $k > n \geq 1$. Neste caso, temos $0 = 0$.

Demonstração. Seja X um conjunto com $n \geq 1$ elementos. Seja S o conjunto de todos os subconjuntos com k elementos de X, onde $k \geq 1$,
$$S = \{A \subseteq X : |A| = k\} \quad \text{e} \quad |S| = \binom{n}{k}.$$

Fixemos $\mathbf{a} \in X$ (arbitrariamente). Vamos classificar os subconjuntos com k elementos de X, com respeito ao elemento $\mathbf{a}$, do seguinte modo: um subconjunto de X com k elementos, ou tem $\mathbf{a}$ como elemento ou não,
$$S_1 = \{A \subseteq X : |A| = k, \, \mathbf{a} \in A\}, \quad S_2 = \{A \subseteq X : |A| = k, \, \mathbf{a} \notin A\}.$$
É claro que $S = S_1 \cup S_2$ e $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ (S_1 e S_2 não têm conjuntos em comum).

Vamos calcular o cardinal de S_1 e S_2.

S_2 é formado por todos os subconjuntos com k elementos de $X \setminus \{\mathbf{a}\}$, portanto,
$$|S_2| = \binom{n-1}{k}.$$

Consideremos $X \setminus \{\mathbf{a}\}$.

Se acrescentarmos o elemento $\mathbf{a}$ a todos os subconjuntos com $k-1$ elementos de $X \setminus \{\mathbf{a}\}$, obtemos todos os conjuntos em S_1. Ou seja, $A \in S_1$ se e só se existe um subconjunto B com $k-1$ elementos de $X \setminus \{\mathbf{a}\}$ tal que $A = B \cup \{a\}$, donde
$$|S_1| = \binom{n-1}{k-1}.$$

A regra da soma produz então $|S| = |S_1| + |S_2|$, isto é,
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \quad n \geq k \geq 1.$$

□

1.2 Regra do produto

- **Produto cartesiano de dois conjuntos**. Se S_1 e S_2 são dois conjuntos não vazios e finitos, então
$$S_1 \times S_2 = \{(a_1, a_2) : a_1 \in S_1, a_2 \in S_2\}$$
é o conjunto dos pares ordenados (a_1, a_2), onde $a_i \in S_i$, $i = 1, 2$.

- Mais geralmente, para $t \geq 1$, se S_1, $S_2, \dots, S_t$ são t conjuntos não vazios e finitos,
$$S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_t = \{(a_1, \dots, a_t) : a_i \in S_i, 1 \leq i \leq t\},$$
é o conjunto dos t-uplos $(a_1, \dots, a_t)$, onde $a_i \in S_i$, para $1 \leq i \leq t$.

Regra do produto. Se $S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_t$, onde S_1, $S_2, \dots, S_t$ são $t \geq 1$ conjuntos não vazios e finitos, então
$$|S| = \prod_{i=1}^{t} |S_i|.$$
Nota 1.3. Se $|S_1| = |S_2| = \cdots = |S_t| = m$ então $|S| = m^t$.

Se existem a maneiras de realizar a tarefa A e b maneiras de realizar a tarefa B (não dependendo a tarefa B do modo como foi realizada a tarefa A) então existem `a.b` maneiras de realizar a tarefa A seguida da tarefa B.

Definição 1.2. . Uma sequência finita de 0's e 1's é chamada uma *palavra* no *alfabeto* $\{0, 1\}$ ou palavra binária. O número de total de 0's e 1's na palavra é chamado o *comprimento* da palavra. Por exemplo, a palavra

$$0111001100001$$

tem comprimento 13

- Quantas palavras de comprimento n podemos formar no alfabeto $\{0, 1\}$?

  Temos de determinar o conjunto $\{a_1 a_2 \cdots a_n : a_i \in \{0, 1\}, i = 1, \dots n\}$.

  Podemos identificar a palavra $a_1 a_2 \cdots a_n$ com o n-uplo
$$(a_1, \dots, a_n) \in \underbrace{\{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \cdots \times \{0, 1\}}_{n}.$$

  Ou seja, temos de determinar o conjunto S de todos os n-uplos $(a_1, \dots, a_n)$ onde $a_i \in \{0, 1\}$, para $i = 1, \dots, n$,
$$S = \underbrace{\{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \cdots \times \{0, 1\}}_{n},$$

$$|S| = 2^n.$$

- O número de palavras de comprimento n que podemos formar no alfabeto $\{1, \ldots, k\}$ é

$$|\underbrace{\{1, \ldots, k\} \times \{1, \ldots, k\} \times \cdots \times \{1, \ldots, k\}}_{n}| = k^n.$$

Exemplo 1.1.

O número de arestas do grafo completo com n vértices K_n é $\binom{n}{2}$, para todo o $n \geq 1$.

Seja $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$ o conjunto dos vértices de K_n. Então o conjunto E das arestas de K_n é definido por todos os subconjuntos de dois elementos distintos de V,

$$E = \{\{x_i, x_j\} : 1 \leq i \neq j \leq n\}.$$

Portanto,

$$|E| = \binom{n}{2}, \; n \geq 1.$$

O número de arestas de K_n é igual ao número de arestas de K_{n-1} mais $n-1$, para todo o $n \geq 2$. O K_n obtém-se de K_{n-1} adicionando-lhe um vértice e em seguida unindo este vértice aos restantes $n-1$ vértices de K_{n-1}. Ou seja, acrescentamos 1 vértice e $n-1$ arestas unindo este vértice aos restantes $n-1$ vértices de K_{n-1}. Então

$$\binom{n}{2} = n - 1 + \binom{n-1}{2}, \; n \geq 2.$$

Exercício 1.1.

1. Mostre que, por indução sobre n, podemos concluir,

$$\binom{n}{2} = (n-1) + \cdots + 2 + 1 = \frac{(n-1)n}{2}, \; n \geq 2.$$

2. Mostre por indução sobre n que o número total de subconjuntos de um conjunto com $n \geq 0$ elementos é 2^n.

3. Mostre que a soma da coluna 1 do rectângulo de Pascal até à linha n é igual ao elemento na linha $n+1$ e coluna 2

$$\binom{n+1}{2} = n + \cdots + 2 + 1.$$

Proposição 1.2.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \; n \geq 0.$$

Demonstração. O lado direito da igualdade é o número de subconjuntos de um conjunto com $n \geq 0$ elementos. Esse número, pelo princípio da soma, pode ser calculado contando o número de subconjuntos de cardinal i, $\binom{n}{i}$, para $i = 0, 1, \ldots, n$, e, em seguida somar tudo. É precisamente o que temos no lado esquerdo da igualdade. □

Nota 1.4. O lado esquerdo da igualdade acima é a soma da n-ésima linha do rectângulo de Pascal para $n \geq 0$.

Exemplo 1.2.

- **1.** Determine o número de números com quatro algarismos pertencentes ao conjunto $\{1, 2, \ldots, 9\}$ que contêm o algarismo 5 uma e uma única vez.

$$4.8^3$$

- **2.** Determine o número de números com quatro algarismos pertencentes ao conjunto $\{1, 2, \ldots, 9\}$ que contêm o algarismo 5.

$$4.9^3?$$

NÃO!

5555 seria contado quatro vezes!

Usando os princípios da adição e do produto:

- Contagem condicionada à primeira posição do 5 no número de quatro algarismos

  $A = \{1, 2, \ldots, 9\}$, $B = A \setminus \{5\}$

$$E_1 = \{5xyz : x, y, z \in A\}$$

$$E_2 = \{x5yz : y, z \in A, x \in B\}$$

$$E_3 = \{xy5z : z \in A, x, y \in B\}$$

$$E_4 = \{xyz5 : x, y, z \in B\}$$

$$E_i \cap E_j = \emptyset, \quad i \neq j$$

$$|E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4| = |E_1| + |E_2| + |E_3| + |E_4| = 9^3 + 8.9^2 + 8^2.9 + 8^3$$

- Alternativa: Contagem condicionada ao número de ocorrências do 5 no número de quatro algarismos

  $A = \{1, 2, \ldots, 9\}$, $B = A \setminus \{5\}$

$$X_1 = \{xyzw : 5 \text{ ocorre exactamente 1 vez}\}$$

$$X_2 = \{xyzw : 5 \text{ ocorre exactamente 2 vezes}\}$$

$$X_3 = \{xyzw : 5 \text{ ocorre exactamente 3 vezes}\}$$

$$X_4 = \{5555\}$$

- $$X_i \cap X_j = \emptyset, \quad i \neq j$$

$$\begin{aligned} |X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4| &= |X_1| + |X_2| + |X_3| + |X_4| \\ &= \binom{4}{1}.8^3 + \binom{4}{2}.8^2 + \binom{4}{3}8^1 + \binom{4}{4}8^0 = \sum_{i=1}^{4} \binom{4}{i} 8^{4-i} \\ &= 9^3 + 8.9^2 + 8^2.9 + 8^3 = \sum_{i=0}^{3} 9^{3-i}8^i = \sum_{i=1}^{4} 9^{4-i}8^{i-1} = 2465. \end{aligned}$$

1.3 Princípio generalizado da multiplicação

Quando em $S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_t$ cada conjunto $S_i, i > 1$ depende das escolhas anteriores.

- **Regra do produto.** Se $S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_t$, onde $S_1, S_2, \ldots, S_t$ são t conjuntos não vazios e finitos, então $|S| = \prod_{i=1}^{t} |S_i|$.

- *Caso em que, para cada sequência* $(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, \ldots, a_t) \in S$, *o conjunto* S_i, $i > 1$, *depende das componentes* $a_1, \ldots, a_{i-1}$.

  Princípio generalizado da multiplicação. Se efectuarmos uma sequência de t escolhas para o qual

  - existem k_1 maneiras possíveis de fazer a primeira escolha, e

  - para cada maneira de fazer as primeiras $i - 1$ escolhas, existem k_i maneiras de fazer a i-ésima escolha,

  então podemos realizar a nossa sequência de escolhas em $k_1 \cdot k_2 \cdots k_t$ maneiras.

Exemplo 1.3. Quantos números existem com quatro algarismos pertencentes ao conjunto $\{1, \ldots, 9\}$ de tal forma que nenhum número tenha dois dígitos iguais?

$S_1 = \{1, \ldots, 9\}$

S_2 depende da escolha do primeiro algarismo. $|S_2| = 8$.

S_3 depende da escolha dos dois primeiros e S_4 depende das três primeiras escolhas. $|S_3| = 7$ e $|S_4| = 6$.

$$9.8.7.6$$

Sejam n e k inteiros positivios satisfazendo $n \geq k$. Então o número de palavras de comprimento k no alfabeto $\{1, \ldots, n\}$ e sem repetição de letras é

$$n(n-1)\ldots(n-k+1).$$

Se $k = n$, obtemos $n!$.

1.4 Princípio da bijecção

- **Princípio da bijecção**. Sejam S e T dois conjuntos finitos. Se existe uma bijecção entre S e T então $|S| = |T|$.
- *Suponhamos que queremos contar os elementos de S. Se conhecermos o cardinal de T e formos capazes de definir uma bijecção entre S e T então ficamos a conhecer o cardinal de S.*

Dado um conjunto finito X, denotamos por

$$2^X := \{A : A \subseteq X\}$$

o conjunto de todos os subconjuntos de X. Chamamos a 2^X a potência do conjunto X ou o conjunto das partes de X.

Proposição 1.3. . *O número de subconjuntos de um conjunto X, onde $|X| = n$, é $2^{|X|} = 2^n$.*

Demonstração. Já determinámos $|2^X| = 2^{|X|}$ por indução sobre $|X| = n$. Faremos agora um *prova bijectiva*. Seja $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ e $A \subseteq X$ fixado arbitrariamente. Vamos associar a A uma palavra do seguinte modo:

$x_1 \in A?$; $x_2 \in A?$; $\ldots$, $x_n \in A?$

Para cada uma das n perguntas só há duas respostas: Sim= 1; Não= 0.

A sequência de 0 e 1's de comprimento n definida por estas respostas define univocamente o conjunto A.

No total há $\underbrace{2.2.\ldots.2}_{n} = 2^n$ respostas o que dá o número total de conjuntos de X.

- Ou seja, consideremos a função

$$f : 2^X \to T = \{\text{todas as palavras de comprimento } n \text{ no alfabeto } \{0,1\}\}$$

  $A \mapsto f(A) = a_1 a_2 \cdots a_n$ onde $a_i = 1$ se $x_i \in A$, e $a_i = 0$ caso contrário.

- f injectiva

  $A, B \subseteq X$

  Se $f(A) = f(B) = a_1 a_2 \cdots a_n$ então $A = B = \{x_j \in X : a_j = 1\}$.

- f sobrejectiva: Dada a palavra $a_1 \cdots a_n \in T$, seja $A = \{x_i \in X : a_i = 1\}$. Então $f(A) = a_1 \cdots a_n$.

  Como f é bijectiva,
$$|2^X| = 2^n = |T|.$$

□

Exemplo 1.4. Para $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
$$f(\{1, 3\}) = 101000.$$
Dada a palavra 110011 o subconjunto de X que lhe corresponde é $\{1, 2, 5, 6\}$.

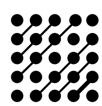
1.5 Princípio de contar de duas maneiras

- Princípio de contar de duas maneiras. Se duas fórmulas enumeram o mesmo conjunto então elas têm que ser iguais.

Exemplo 1.5. Consideremos a identidade
$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n+1)n}{2}.$$

Vamos provar a identidade mostrando que o lado esquerdo e o lado direito desta identidade enumeram o mesmo conjunto.

Vamos contar os pontos na grelha $(n+1) \times (n+1)$ de duas maneiras: Para $n = 4$,



• $n+1$ pontos por cada uma das $n+1$ linhas: $(n+1)^2$.

• contando os pontos dos dois triângulos, acima e abaixo da diagonal secundária, e adicionando os pontos desta diagonal: $2\sum_{i=1}^{n} i + (n+1)$.

Então das duas maneiras de contar os pontos, obtemos a igualdade
$$(n+1)^2 = 2\sum_{i=1}^{n} i + (n+1).$$
A partir desta, por manipulação algébrica, podemos deduzir a primeira identidade:
$$(n+1)^2 - (n+1) = 2\sum_{i=1}^{n} i$$

$$(n+1)n = 2\sum_{i=1}^{n} i$$

$$\frac{(n+1)n}{2} = \sum_{i=1}^{n} i.$$

Corolário 1.4.

$$\binom{n+1}{2} = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n+1)n}{2}.$$

Demonstração. Por definição o número de subconjuntos com 2 elementos de um conjunto com $n+1$ elementos é $\binom{n+1}{2}$. Já mostrámos, por indução sobre n, que $\displaystyle\binom{n+1}{2} = \sum_{i=1}^{n} i$, e, do resultado anterior temos então

$$\binom{n+1}{2} = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n+1)n}{2}.$$

`Prova alternativa`. Vamos agora fazer uma demonstração por classificação dos subconjuntos com dois elemento de X de acordo com o maior elemento do subconjunto, e onde se usa seguidamente o princípio da soma.

Para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, seja

$$S_i = \{\{i, x\} \subseteq X : 0 \leq x < i\} = \{\{0, i\}, \{\{1, i\}, \ldots, \{\{i-1, i\}\}$$

$$|S_i| = i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$S_i \cap S_j = \emptyset,\ i \neq j$$

Pelo princípio da soma

$$\binom{n+1}{2} = \sum_{i=1}^{n} |S_i| = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n+1)n}{2}.$$

$$S_i = \{\{i, x\} \subseteq X : 0 \leq x < i\} = \{\{0, i\}, \{\{1, i\}, \ldots, \{\{i-1, i\}\}$$

$$|S_i| = i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$S_i \cap S_j = \emptyset,\ i \neq j$$

Pelo princípio da soma e do resultado anterior

$$\binom{n+1}{2} = \sum_{i=1}^{n} |S_i| = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n+1)n}{2}.$$

□

Exercício 1.2. Usando o Exemplo 1.2, mostre que

$$\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (n-1)^{k-i} = \sum_{i=1}^{k} n^{k-i}(n-1)^{i-1}, \quad 1 \le k \le n.$$

- O que conta o L.E. (lado esquerdo) e o L.D. (lado direito) desta igualdade?
- Quantos palavras com comprimento k existem no alfabeto $\{1, 2, \ldots, n\}$ contendo a letra 1?
- Note que $1 \le k \le n$

$$\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (n-1)^{k-i} = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{k-i} (n-1)^{k-i} = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} (n-1)^{j}.$$

Exemplo 1.6. Mostre que podemos escrever o conjunto $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ como a união disjunta de dois conjuntos sem que nenhum seja vazio de $2^{n-1} - 1$ maneiras. (Sugestão: Observe que $X = A \cup A^c$, para todo o $A \subseteq X$ onde $A \neq \emptyset, X$, e que um contém n e o outro não.)

Par $n = 1$ existem 0 maneiras. Consideremos $n > 1$. Vamos mostrar que existe uma bijecção entre os conjuntos $\mathcal{B} = \{B \subseteq [n-1] : B \neq \emptyset\} = \mathcal{A} = \{A \subseteq X : A \sqcup A^c = X, A \neq \emptyset,\ n \notin A\}$, $\mathcal{X} = \{A \sqcup A^c : A \subseteq X, A \neq \emptyset, X\}$

Consideremos

$$\begin{aligned} f : \mathcal{X} &\longrightarrow \mathcal{A} \\ A \mapsto f(A \sqcup A^c) &= \begin{cases} A & n \notin A \\ A^c & n \in A. \end{cases} \end{aligned}$$

f está bem definida: $n \notin A \Rightarrow \emptyset \neq A \subseteq [n-1] \Rightarrow A \in \mathcal{B}$, ou $n \in A \neq X \Rightarrow \emptyset \neq A^c \subseteq [n-1]$.

f é injectiva.

$f(A_1) = f(A_2) \Rightarrow A_1 = A_2$ se $n \notin A_1 \cup A_2$ ou $f(A_1) = f(A_2) \Rightarrow A_1^c = A_2^c \Rightarrow A_1 = A_2$.

1.6 Permutações

Definição. Dado $n \ge 1$, uma permutação de $\{1, \ldots, n\}$ é uma palavra no alfabeto $\{1, \ldots, n\}$ de comprimento n com as letras todas distintas.

$n = 1$, permutações de $\{1\}$: 1 $\qquad$ $1! = 1$ permutação.

$n = 2$, permutações de $\{1, 2\}$: 12, 21, $\qquad$ $2! = 2.1$ permutações

$n = 3$, permutações de $\{1, 2, 3\}$:
123,132, 312;
213, 231, 321, $\quad$ $3! = 3.2.1 = 3.2!$ permutações
$n = 4$ permutações de $\{1, 2, 3, 4\}$:
1234,1243, 1423, 4123,
1324, 1342, 1432, 4132,
3124, ...
$\vdots$

Denotamos por $\mathfrak{S}_n$ o conjunto de todas as permutações de $\{1, \dots, n\}$:

$$\mathfrak{S}_n := \{ \text{ palavras de comprimento } n\text{, com letras distintas, no alfabeto } \{1, \dots, n\}\},$$

$|\mathfrak{S}_n| = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)\cdots 2.1$

Nota 1.5. Por convenção escrevemos $0! = 1$. Porquê?

$$n! = \frac{(n+1)!}{n+1},\ n > 0$$

Para $n = 0$ também faz sentido, $0! = 1$.

Outra explicação. Para $n = 0$, temos $\mathfrak{S}_0$ como o conjunto de todas as palavras sem letras, ou seja, no alfabeto $\emptyset$. Há apenas uma palavra sem letras, chamada a palavra vazia.

1.7 Arranjos com repetição

Dados n tipos de objectos podemos formar diferentes configurações de k objectos por vezes assumindo que essas configurações podem conter mais do que um objecto do mesmo tipo. Dados n tipos de objectos, as configurações de k objectos que dependem da ordem e podem conter mais do que um objecto do mesmo tipo são chamadas *arranjos com repetição de n elementos k a k.*

O número de arranjos com repetição de um conjunto com n elementos k a k, pelo princípio da multiplicação, é

$$n^k.$$

O número de palavras de comprimento k que podemos formar com n símbolos é n^k.

1.8 Arranjos sem repetição

Se na definição de arranjo não permitirmos repetição de qualquer elemento, dizemos que temos um arranjo simples ou arranjo sem repetição. Pelo princípio da multiplicação generalizada, o número de arranjos sem repetição de n elementos k a k é

$$n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

chamado *coeficiente factorial.*

Número de palavras de comprimento k no alfabeto $\{1,\ldots,n\}$ sem repetição de letras.

Número de maneiras de colocar em fila k objectos de um conjunto de n objectos distintos.

Quando $n=k$ obtemos $n(n-1)\cdots 2.1$ e os arranjos são designados por *permutações.*

1.9 Combinações simples

- Dado um conjunto X com n elementos, as escolhas de k elementos sem repetição e sem que a ordem segundo a qual os elementos são escolhidos tenha qualquer importância, isto é a escolha de conjuntos de cardinalidade k, designam-se por combinações simples ou combinações de n, k a k.

- Quantas maneiras temos de seleccionar k objectos distintos de um conjunto de n objectos distintos?

- Queremos seleccionar um comité de k pessoas de um grupo de n pessoas das quais o José. Quantos comités temos com o José? E sem o José?

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k},\ 1\leq k\leq n.$$

É um argumento combinatório para a recorrência de Pascal.

Proposição 1.5. *Para todo* $0\leq k\leq n$*,*

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}.$$

Demonstração. Vamos fazer uma *prova bijectiva.* O lado esquerdo da igualdade conta o número de subconjuntos com k elementos de $X=\{1,\cdots,n\}$, e o lado direito o número de subconjuntos com $n-k$ elementos de X.

Consideremos a bijecção f do conjunto $\mathcal{S}$ de todos subconjuntos com k elementos de $X=\{1,\cdots,n\}$ para o conjunto $\mathcal{S}'$ de todos subconjuntos com $n-k$ elementos de X,

$$f:\mathcal{S}=\{S\subseteq X:|S|=k\}\longrightarrow \mathcal{S}'=\{S'\subseteq X:|S'|=n-k\},$$

$$S\mapsto f(S)=X\setminus S$$

$$|X\setminus S|=|X|-|S|=n-k$$

Pelo princípio da bijecção,

$$|\mathcal{S}| = \binom{n}{k} = |\mathcal{S}'| = \binom{n}{n-k}.$$

Vamos provar que de facto f é uma bijecção.

f é injectiva:

Sejam $S, T \in S$,

$f(S) = f(T) \Leftrightarrow X \setminus S = X \setminus T \Rightarrow X \setminus (X \setminus S) = X \setminus (X \setminus T) \Rightarrow S = T$

f é sobrejectiva:

Seja $Z \in S'$. Então $X \setminus Z \in S$ porque $|X \setminus Z| = n - (n - k) = k$, e $f(X \setminus Z) = Z$.

□

Exemplo 1.7. Quantas

- maneiras existem de seleccionar r objectos distinguíveis de n objectos distinguíveis?
- sequências binárias de comprimento n existem com r 1's e $(n - r)$ 0's?

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

O número destas sequências binárias de comprimento n é igual ao número de escolhas de r posições (distinguíveis) para os r dígitos 1 (equivalentemente $n - r$ posições para os $n - r$ dígitos 0) de entre as n (distinguíveis) posições.

Pelo exercício 15 da Folha 1, existe uma bijecção entre os subconjuntos de $[n]$ e as palavras binárias de comprimento n tal que a cada $A \subseteq [n]$ com $|A| = r$ corresponde uma palava binária de comprimento n com r entradas iguais a 1 e $n-r$ iguais a zero. Logo, pelo princípio da bijecção a resposta às duas perguntas é a mesma $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$.

1.10 Fórmula para as combinações simples

Provaremos agora uma fórmula para o número de subconjuntos com k elementos de um conjunto com n elementos.

Proposição 1.6. *Dados os inteiros* $n \geq k \geq 0$*,*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

Demonstração. Já provámos esta fórmula por indução sobre n. Essa demonstração não nos dá nenhum significado enumerativo para a fórmula. Faremos agora uma demonstração onde essa explicação está presente.

Queremos contar todos os subconjuntos de k elementos que podemos formar no conjunto $X = \{1, \ldots, n\}$.

Vamos contar de uma maneira errada.

Para formar um conjunto $\{b_1, \ldots, b_k\}$ no conjunto X

• podemos escollher b_1 de n maneiras

• podemos escollher b_2 de $n-1$ maneiras - todas excepto b_1

• podemos escollher b_3 de $n-2$ maneiras - todas excepto b_1 e b_2

$\vdots$

• podemos escollher b_k de $n-k+1$ maneiras - todas excepto $b_1, \ldots, b_{k-1}$

O número total de escolhas é $n(n-1)\cdots(n-k+1)$.

O que nós contámos foram subconjuntos ordenados de k elementos, isto é, formados por elementos ordenados, pois não distinguimos conjuntos que diferem entre si apenas pela ordem em que os elementos estão neles dispostos.

$$\{1,2\} = \{2,1\}, \quad \{1,2,3\} = \{2,1,3\} = \{3,2,1\}$$

Acabámos então de mostrar que o número de subconjuntos ordenados com k elementos em X é igual a $n(n-1)\cdots(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Vamos agora contar de outra maneira os subconjuntos ordenados de k elementos em X.

Sabemos que existem $\binom{n}{k}$ maneiras e escolher um conjunto de k elementos de X. Dado um conjunto com k elementos de X, existem $k!$ maneiras de o ordenar. Portanto, o número de conjuntos ordenados de k elementos de X é $k!\dbinom{n}{k}$. Como contámos os mesmos objectos de duas maneiras diferentes, temos

$$\#\ k\text{-conjuntos ordenados de } X = k!\binom{n}{k} = n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Donde,

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

□

CAPÍTULO 2

TEOREMA BINOMIAL

2.1 Função geradora de $2^{[n]}$

Função geradora de $2^{\{1,2\}}$ (de todos os subconjuntos de $\{1,2\}$):

Dado o inteiro positivo $n \geq 0$ escrevemos abreviadamente $[n] := \{1, \dots, n\}$.

$2^{\emptyset} = \{\emptyset\}$. Consideremos o polinómio constante 1.

$2^{[1]} = \{\emptyset, \{1\}\}$. Consideremos a variável x_1 e o polinómio $1 + x_1$.

$2^{[2]} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$. Sejam x_1, x_2 duas variáveis independentes,

$$(1+x_1)(1+x_2) = (1+x_1) + (1+x_1)x_2 = 1 + x_1 + x_2 + x_1x_2,$$

$$\prod_{i\in\emptyset} x_i = 1 \quad \prod_{i\in\{1\}} x_i = x_1, \quad \prod_{i\in\{2\}} x_i = x_2, \quad \prod_{i\in\{1,2\}} x_i = x_1x_2.$$

Finalmente obtemos,

$$(1+x_1)(1+x_2) = \prod_{i\in\emptyset} x_i + \prod_{i\in\{1\}} x_i + \prod_{i\in\{2\}} x_i + \prod_{i\in\{1,2\}} x_i = \sum_{A\subseteq[2]} \prod_{i\in A} x_i.$$

Função geradora de $2^{\{1,2,3\}}$:

$2^{[3]} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3,\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$. Sejam x_1, x_2, x_3 variáveis independentes, então

$$\begin{aligned}
(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3) &= (1+x_1)(1+x_2) + (1+x_1)(1+x_2)x_3 \\
&= 1 + x_1 + x_2 + x_3 \\
&\quad + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \\
&\quad + x_1x_2x_3 \\
&= \sum_{A\subseteq[3]} \prod_{i\in A} x_i.
\end{aligned}$$

- Consideremos $2^{[n]} = \{$todos os subconjuntos de [n]$\}$, $n \geq 0$.

  A função geradora de n variáveis para os subconjuntos de $[n]$ é

$$(1 + x_1)(1 + x_2)\cdots(1 + x_n).$$

Por indução sobre $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
& (1 + x_1)(1 + x_2)\cdots(1 + x_{n-1})(1 + x_{n}) = \\
= \; & \underbrace{(1 + x_1)(1 + x_2)\cdots(1 + x_{n-1})} + (1 + x_1)(1 + x_2)\cdots(1 + x_{n-1})x_{n} \\
= \; & \sum_{A\subseteq[n-1]} \prod_{i\in A} x_i + x_{n} \sum_{A\subseteq[n-1]} \prod_{i\in A} x_i \\
= \; & \sum_{A\subseteq[n-1]} \prod_{i\in A} x_i + \sum_{A\subseteq[n-1]} x_{n} \prod_{i\in A} x_i \\
= \; & \sum_{A\subseteq[n-1]} \prod_{i\in A} x_i + \sum_{A\subseteq[n-1]} \prod_{i\in A\cup\{n\}} x_i \\
= \; & \sum_{A\subseteq[n]} \prod_{i\in A} x_i
\end{aligned}$$

2.2 Função geradora de $2^{[n]}$ com respeito ao cardinal (peso), teorema binomial e coeficientes binomiais

A função geradora de n variáveis para os subconjuntos de $[n]$ é

$$(1 + x_1)(1 + x_2)\cdots(1 + x_n).$$

Ou seja,

$$(1 + x_1)(1 + x_2)\cdots(1 + x_{n-1})(1 + x_n) = \sum_{A\subseteq[n]} \prod_{i\in A} x_i. \tag{2.1}$$

Façamos $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$ em (2.1):

$$\prod_{i\in A} x_i = x^{|A|} \quad e \quad (1 + x)^n = \sum_{A\subseteq[n]} x^{|A|}.$$

Obtemos a igualdade

$$(1 + x)^n = \sum_{A\subseteq[n]} x^{|A|}.$$

No segundo membro desta igualdade, agrupemos agora as parcelas da soma, segundo o cardinal de A,

$$\begin{aligned}\sum_{A\subseteq[n]} x^{|A|} &= \sum_{\substack{A\subseteq[n]\\|A|=0}} x^{|A|} + \sum_{\substack{A\subseteq[n]\\|A|=1}} x^{|A|} + \cdots + \sum_{\substack{A\subseteq[n]\\|A|=n-1}} x^{|A|} + \sum_{\substack{A\subseteq[n]\\|A|=n}} x^{|A|}\\ &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{A\subseteq[n]\\|A|=k}} x^{|A|}\end{aligned}$$

Quantos subconjuntos de $[n]$ existem com cardinal k? Quantas vezes é que o termo x^k aparece na soma

$$\sum_{\substack{A\subseteq[n]\\|A|=k}} x^{|A|} = \binom{n}{k} x^k$$

A função geradora de $2^{[n]}$ com respeito ao cardinal (peso) é

$$(1+x)^n.$$

Pois,

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= \sum_{A\subseteq[n]} x^{|A|}\\ &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{A\subseteq[n]\\|A|=k}} x^{|A|}\\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\end{aligned}$$

Convencionamos $(1+x)^0 := \binom{0}{0}x^0 = 1$.

Teorema 2.1. **Teorema binomial.** *Para todo o* $n \geq 0$,

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}.$$

Exemplo 2.1. $(1+x^5) = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$, $\binom{5}{2} = 1+2+3+4 = 4\times 5/2$.

2.3 Algumas identidades binomiais e o rectângulo de Pascal

• Várias identidades são consequência da expansão no Terema binomial 2.1. Fazendo $x = 1$ em Teorema 2.1, obtemos a Soma da linha n do rectângulo de Pascal. Para todo o $n \geq 0$,

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}.$$

2.3.1 Soma alternada dos coeficientes binomiais de uma linha do rectângulo de Pascal

Fazendo $x = -1$ no Teorema 2.1, obtemos para todo o $n \geq 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$$

Ou seja,

$$\sum_{\substack{k \text{ par} \\ 0 \leq k \leq n}} \binom{n}{k} = \sum_{\substack{k \text{ ímpar} \\ 0 \leq k \leq n}} \binom{n}{k}.$$

Concluímos que o número de subconjuntos de $\{1, \ldots, n\}$ que têm um número ímpar de elementos é igual ao número de subconjuntos que têm um número par de elementos. Seja esse número s. Então

$$2s = 2^n, \quad e \quad s = 2^{n-1}.$$

2.3.2 Soma da coluna k do rectângulo de Pascal

Proposição 2.2. *A soma da coluna k do rectângulo de Pascal até à linha n é igual ao elemento situado na coluna $k+1$ e linha $n+1$. Para todo o $n \geq k \geq 0$, temos*

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{i}{k} = \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \cdots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Demonstração. : Classifiquemos os subconjuntos com $k+1$ elementos de $X = \{1, \ldots, n, n+1\}$ de acordo com o maior elemento i, $i = k+1, \ldots, n+1$.

$S_{k+1} = \{A \subseteq X : |A| = k+1$ e cujo maior elemento é $k+1\}$

$$S_{k+1} = \{A = \{a_1, \ldots, a_k\} \cup \{k+1\} : \{a_1, \ldots, a_k\} \subseteq [k]\}$$

$$= \{\{1, \ldots, k, k+1\}\}$$

$$|S_{k+1}| = \binom{k}{k}$$

□

Exemplo 2.2. Contando de duas maneiras mostre que $\binom{n+1}{3} = \sum_{i=1}^{n} i(n-i) = \sum_{i=1}^{n} \binom{i}{2}$. (Sugestão: Classifique os conjuntos de três elementos quanto ao maior elemento e quanto ao elemento médio.)

Na proposição anterior fazendo $k = 2$ obtemos $\binom{n+1}{3} = \sum_{i=1}^{n} \binom{i}{2}$, a soma da coluna 2 do rectângulo de Pascal até à linha n é igual ao elemento situado na coluna $3 = 2 + 1$ e linha $n + 1$. De facto, um conjunto de três elementos num conjunto $n + 1$ elementos tem amior elemento $i + 1$, onde $2 \leq i \leq n$. Então os outros dois elementos são escolhidos em $\{1, \ldots, i\}$ onde $2 \leq i \leq n$. Logo $\binom{n+1}{3} = \sum_{i=2}^{n} \binom{i}{2} = \binom{n+1}{3} = \sum_{i=1}^{n} \binom{i}{2}$.

Provemos a igualdade $\binom{n+1}{3} = \sum_{i=1}^{n} i(n-i)$. Um conjunto de três elementos num conjunto de $n + 1$ elementos tem elemento médio $i + 1$, $1 \leq i \leq n - 1$. Então o elemento menor é escolhido em $\{1, \ldots, i\}$ e o maior em $\{i + 2, \ldots, n, n + 1\}$. Então pelo princípio da multiplicação e a da soma, temos

$$\binom{n+1}{3} = \sum_{i=1}^{n-1} i(n-i) = \sum_{i=1}^{n} i(n-i).$$

Corolário 2.3. *Use a regra da soma e de contar de duas maneiras para provar*

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

Prova: A linha i do rectângulo de Pascal tem soma 2^i, para $i = 0, 1, 2, \ldots$ A soma (das entradas) de todas as linhas do rectângulo de Pascal até à linha n, é, por um lado, igual a $\sum_{k=0}^{n} 2^k$, e, por outro lado, é igual à soma de todas as colunas do do rectângulo de Pascal, cada uma delas, até à linha n.

A soma da coluna k até à linha n é igual à entrada na linha $n + 1$ e coluna $k + 1$, para $k = 0, 1, \ldots$. Portanto, a soma de todas as colunas até à linha n é igual à soma das entradas na linha $n + 1$ menos a primeira entrada. Ou seja,

$$2^{n+1} - 1.$$

□

2.3.3 Derivando

Consideremos, o Teorema 2.1: para todo o $n > 0$, $(1 + x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$.

Derivando ambos os membros do Teorema 2.1 em ordem a x e fazendo em seguida $x = 1$, tem-se

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n.2^{n-1}, \quad n > 0.$$

Derivando $k \geq 0$ vezes ambos os membros do Teorema 2.1 em ordem a x, e fazendo em seguida $x = 0$, tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{d^k}{dx}\left((1+x)^n\right)\Big|_{x=0} &= n(n-1)\cdots(n-k+1)(1+x)^{n-k}\Big|_{x=0} \\
&= n(n-1)\cdots(n-k+1) \\
&= \frac{d^k}{dx}\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j\right)\Big|_{x=0} = \frac{d^k}{dx}\left(\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}x^j\right)+ \\
&+ \frac{d^k}{dx}\left(\sum_{j=k+1}^{n}\binom{n}{j}x^j\right)\Big|_{x=0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= k!\binom{n}{k} + \left(\sum_{j=k+1}^{n}\binom{n}{j}j(j-1)\cdots(j-k+1)x^{j-k}\right)\Big|_{x=0} \\
&= k!\binom{n}{k}.
\end{aligned}$$

$$\text{Logo, } n(n-1)\cdots(n-k+1) = k!\binom{n}{k} \quad e \quad \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

Obtemos novamente a fórmula das combinações simples.

2.4 Teorema binomial (generalizado)

Teorema 2.4. Para todo o $n \geq 0$, $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$.

Demonstração. Consideremos o produto dos n factores

$$\underbrace{(x+y)(x+y)\cdots(x+y)}_{n}.$$

Quando calculamos a expansão do produto, escolhemos em cada um dos n factores um x ou um y. Registando cada escolha de x com 1, e cada escolha de y com 0, formamos uma palavra binária de comprimento n: quando escolhemos x no j-ésimo factor do produto, 1 é a j-ésima letra da palavra, e quando escolhemos y a j-ésima letra será 0.

Temos então uma bijecção entre as ocorrências dos monómios na expansão do produto e as palavras binárias de comprimento n.

Como num monómio as variáveis comutam, obtemos monómios em x e y de grau n, $x^k y^{n-k}$, que correspondem à escolha de k termos com x e $n-k$ termos com y, $0 \leq k \leq n$. O coeficiente de $x^k y^{n-k}$ é então igual ao número de palavras binárias de comprimento n com k $1'$s e $n-k$ 0's. Ou seja, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

$\square$

Exemplo 2.3.

$$\begin{aligned}(x+y)^3 &= (x+y)(x+y)+(x+y)\\ &= xxx+xyx+xxy+yxx+xyy+yxy+yyx+yyy\\ &= \binom{3}{3}x^3+\binom{3}{2}x^2y+\binom{3}{1}xy^2+\binom{3}{0}y^3.\end{aligned}$$

111, 101, 110, 011, 100, 010, 001, 000

2.5 A identidade de Vandermonde

Proposição 2.5. *Para todo* $r \geq 0$*,* $s \geq 0$ *e* $n \geq 0$*,*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}.$$

Demonstração. No exercício 31 das folhas de problemas demonstrámos esta igualdade apresentando um argumento combinatório de contar de duas maneiras. Faremos agora uma demostração baseada no teorema binomial.

Consideremos a igualdade $(1+x)^r(1+x)^s = (1+x)^{r+s}$. Usando a expansão do teorema binomal, tem-se

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{s}\binom{s}{j}x^j\right) &= (1+x)^r(1+x)^s\\ &= (1+x)^{r+s}\\ &= \sum_{n=0}^{r+s}\binom{r+s}{n}x^n\end{aligned}$$

Qual é o coeficiente de x^n em $\left(\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{s}\binom{s}{j}x^j\right)$?

- Como multiplicamos dois polinómios? O produto de dois polinómios é dado por

$$\left(\sum_{i=0}^{r}a_ix^i\right)\left(\sum_{j=0}^{s}b_jx^j\right) = \sum_{n=0}^{r+s}\left(\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\right)x^n,$$

onde convencionamos $a_i = 0$, para todos os inteiros $i > r$, e $b_j = 0$, para todos os inteiros $j > s$.

- Da multiplicação dos dois polinómios

$$\left(\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{s}\binom{s}{j}x^j\right),$$

para cada $n = 0, 1, 2, \ldots, r+s$, temos

$$\binom{r}{k}x^k\binom{s}{n-k}x^{n-k} = \binom{r}{k}\binom{s}{n-k}x^n,\ 0 \leq k \leq n.$$

Somando todos os termos em x^n, obtém-se

$$\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}\right]x^n$$

Como consequência da multiplicação de dois polinómios resulta que,

$$\left(\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{s}\binom{s}{j}x^j\right) = \sum_{n=0}^{r+s}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}\right]x^n$$

Dois polinómios são iguais se e só se os coeficientes dos termos do mesmo grau são iguais. Da igualdade

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{s}\binom{s}{j}x^j\right) &= \sum_{n=0}^{r+s}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}\right]x^n \\ &= \sum_{n=0}^{r+s}\binom{r+s}{n}x^n\end{aligned}$$

resulta a chamada *identidade de Vandermonde*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n},$$

para todo $r \geq 0$, $s \geq 0$ e $0 \leq n \leq r+s$. Para $n > r+s$ a igualdade também é válida porque neste caso ambos os lados da igualdade são iguais a zero, por definição de coeficiente binomial.

Para $n > r+s$ a igualdade também é válida porque neste caso ambos os lados da igualdade são iguais a zero, por definição de coeficiente binomial,

$$\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}\binom{s}{n-k} + \sum_{k=r+1}^{r+s}\binom{r}{k}\binom{s}{n-k} + \sum_{k=r+s+1}^{n}\binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = 0$$

$\square$

Definição 2.1. Define-se, para $k \geq 0$, o polinómio de grau k na variável x,

$$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)}{k!}.$$

Exercício 2.1. Se dois polinómios $p(x)$ e $q(x)$ sobre $\mathbb{C}$ de grau $\leq k$ coincidem em mais do que k valores de $\mathbb{C}$, então eles são iguais. Em particular,

$$p(n) = q(n), \quad \text{para todo o } n \in \mathbb{N} \Rightarrow p \text{ e } q \text{ são polinómios iguais.}$$

Usando o argumento polinomial, prove a identidade de Chu-Vandermonde

$$\binom{x+y}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k}\binom{y}{n-k}, \quad x \text{ e } y \text{ avariáveis complexas.}$$

2.5.1 Mais exemplos de contar de duas maneiras

Proposição 2.6.

$$k\binom{n}{k} = (n-k+1)\binom{n}{k-1} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

Demonstração. É claro que estas igualdades podem ser verificadas algebricamnte usando a fórmula para os coeficientes binomiais. Faremos uma demonstração rápida usando o princípio de contar de duas maneiras.

Quantas maneiras existem de escolher uma comissão de k pessoas de entre um conjunto de n pessoas, e designar um membro dessa comissão presidente?

Existem $\binom{n}{k}$ maneiras de escollher a comissão e, para cada comissão, k escolhas para o presidente. Ou seja, $k\binom{n}{k}$. Em alternativa, podemos escolher o presidente primeiro de n maneiras, e depois para cada escolha do presidente os restantes $k-1$ membros da comissão das restantes $n-1$ pessoas de $\binom{n-1}{k-1}$ maneiras. Ou seja, $n\binom{n-1}{k-1}$. Outra alternativa, podemos escolher em primeiro lugar de $\binom{n}{k-1}$ maneiras os $k-1$ membros da comissão que não são designados para presidente e depois, para cada um desses $k-1$ membros da comissão, o presidente das restantes $n-k+1$ pessoas de $n-k+1$ maneiras.

□

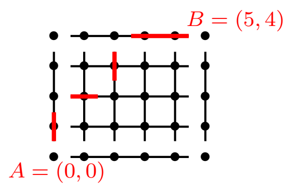
Exercício 2.2. Mostre que

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}, \quad n \geq m \geq k \geq 0.$$

(Quantos pares de conjuntos (A, B), onde $B \subseteq A \subseteq [n]$ e $|B| = k \leq |A| = m$, podemos escolher em $[n]$? Conte de duas maneiras.

2.6 Caminhos numa grelha

Consideremos em $\mathbb{Z}^2$ (os pontos de $\mathbb{R}^2$ de coordenadas inteiras) os pontos $A = (0,0)$ e $B = (m,n)$, m, $n \geq 0$. Seja $L(m,n)$ o número dos caminhos que começam em A e terminam em B andando apenas com passos unitários para Este, passos $(1,0)$, e para Norte, passos $(0,1)$. Mostraremos que existe uma bijeção entre estes caminhos na grelha e palavras binárias. Por exemplo, para $m = 5$ e $n = 4$



passo $(0,1)$, segmento vertical $\longleftrightarrow 0$, passo $(1,0)$, segmento horizontal $\longleftrightarrow 1$

O caminho de A para B a vermelho na grelha é codificado pela palavra binária $\longleftrightarrow$ 001100111.

Proposição 2.7. *Existe uma bijecção entre o conjunto dos caminhos de* $A = (0,0)$ *para* $B = (m,n)$ *caminhando com passos unitários apenas no sentido Este (E) ou Norte (N), e o conjunto das sequências binárias com* m *uns e* n *zeros.*

Demonstração. Consideremos a função entre o conjunto $\mathcal{C}$ de todos esses caminhos de A para B e o conjunto $\mathcal{W}$ de todas as palavras binárias de comprimento $m+n$ com m uns e n zeros tal que a cada caminho de $\mathcal{C}$ faz corresponder a seguinte palavra binária: um passo para Este é registado como 1, e um passo para Norte como zero, pela ordem que ocorrem.

Todo o caminho de A para B em $\mathcal{C}$ consiste de $m+n$ passos, andando n passos para Norte e m passos para Este. Portanto, a cada caminho em $\mathcal{C}$ corresponde uma palavra binária de comprimento $m+n$ com m 1's e n 0's.

A função é injectiva. Se dois caminhos são distintos isso significa que a sequência de passos para Norte e Este não é a mesma e as palavras binárias correspondentes são distintas.

A função é sobrejectiva. Dada a palavra w em $\mathcal{W}$, seja o caminho com início em A tal que o passo $j = 1, \ldots, m+n$, se faz para Norte se a letra na posição j de w é zero e para Este se a letra é 1. Temos então uma bijeção.

□

Corolário 2.8. *Se* $L(m,n)$ *é o número de caminhos na grelha* $m \times n$ *de pontos em* $\mathbb{Z}^2$ *de* $(0,0)$ *para* (m,n) *andando apenas com passos unitários para Este ou para Norte, então*

$$L(m,n) = \binom{m+n}{m} = \binom{m+n}{n} = L(n,m).$$

Demonstração. Consequência da bijeção anterior, $|\mathcal{C}| = |\mathcal{W}|$ e $|\mathcal{W}| = \binom{m+n}{n}| = \binom{m+n}{m}$. O número destas sequências binárias de comprimento $m + n$ é igual ao número de escolhas de m posições para o dígito um (equivalentemente n posições para o dígito zero) de entre as $m + n$ posições.

O número de sequências binárias de comprimento $m+n$ com m posições para o dígito um e as restantes para o dígito zero é igual ao número de sequências binárias de comprimento $m + n$ com m posições para o dígito zero e as restantes para o dígito 1.

Por exemplo, trocando os zeros com os 1's, obtemos 00110110000101 $\leftrightarrow$ 11001001111010.

$\square$

CAPÍTULO 3

PRINCÍPIO DA INCLUSÃO EXCLUSÃO

Recorde o Exemplo 1.2.

- Quantos números existem com quatro algarismos pertencentes ao conjunto $\{1, 2, \dots, 9\}$ e que contêm o algarismo 5?

  `Respondemos anteriormente a esta pergunta usando o princípio da soma o qual exige que decomponhamos o conjunto dos objectos que queremos enumerar em subconjuntos dois a dois disjuntos.`

  $9^3 + 8.9^2 + 8^2.9 + 8^3$

  `Em alternativa podemos responder à seguinte pergunta que é mais simples.`

- Quantos números existem com quatro algarismos pertencentes ao conjunto $\{1, 2, \dots, 9\}$ sem o algarismo 5 ?

- Quantos números existem com quatro algarismos pertencentes ao conjunto $\{1, 2, \dots, 9\}$ sem o algarismo 5 ?

  X: conjunto de todos os números com quatro algarismos pertencentes ao conjunto $\{1, 2, \dots, 9\}$.

  A: conjunto de todos os números com quatro algarismos pertencentes ao conjunto $\{1, 2, \dots, 9\}$ sem o algarismo 5= conjunto de todos os números com quatro algarismos pertencentes ao conjunto $\{1, 2, \dots, 9\} \setminus \{5\}$.

  $X \setminus A$: conjunto de todos os números com quatro algarismos pertencentes ao conjunto $\{1, 2, \dots, 9\}$ e que contêm o algarismo 5.

$$|X \setminus A| = |X| - |A| = 9^4 - 8^4 = 9^3 + 8.9^2 + 8^2.9 + 8^3$$

Sejam $A_1,\ A_2, \ldots, A_n$ subconjuntos de um conjunto X. Então o número de elementos no universo X que não estão em nenhum dos suconjuntos $A_1,\ A_2, \ldots, A_n$, é

$$|X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i| = |X| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1\leq i<j\leq n} |A_i \cap A_j| -$$
$$- \sum_{1\leq i<j<l\leq n} |A_i \cap A_j \cap A_l| + \cdots + (-1)^k \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| + \cdots +$$
$$+(-1)^n |A_1 \cap \cdots \cap A_n|.$$

O número de elementos em um ou mais dos conjuntos $A_1,\ A_2, \ldots, A_n$, é

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\leq i<j\leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\leq i<j<l\leq n} |A_i \cap A_j \cap A_l| - \cdots +$$
$$+(-1)^{k+1} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| + \cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \cdots \cap A_n|.$$

Verificação da contagem

- O número de elementos em um ou mais dos conjuntos $A_1,\ A_2, \ldots, A_n$, é

$$\begin{aligned} |\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = & \sum_{i=1}^{n} |A_i| \\ & - \sum_{1\leq i<j\leq n} |A_i \cap A_j| \\ & + \sum_{1\leq i<j<l\leq n} |A_i \cap A_j \cap A_l| - \cdots + \\ & + (-1)^{k+1} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| \\ & + \cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \cdots \cap A_n|. \end{aligned}$$

- Consideremos um elemento que está em exactamente $1 \leq r \leq n$ conjuntos de $A_1, A_2, \ldots, A_n$. O número de vezes que este elemento é contado na expressão acima

$$\binom{r}{1} - \binom{r}{2} + \binom{r}{3} - \cdots + (-1)^{r+1}\binom{r}{r} = -\left(\sum_{i=1}^{r} (-1)^i \binom{r}{i}\right)$$
$$\sum_{i=0}^{r} (-1)^i \binom{r}{i} = 1 + \sum_{i=1}^{r} (-1)^i \binom{r}{i} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{r} (-1)^i \binom{r}{i} = -1$$
$$\Rightarrow -\left(\sum_{i=1}^{r} (-1)^i \binom{r}{i}\right) = -(-1) = 1.$$

- Este elemento é contado exactamente 1 vez como se deseja.

Podemos enunciar o princípio da inclusão-exclusão do seguinte modo.

Teorema 3.1. *(Princípio da inclusão exclusão.) Sejam X um conjunto e sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ uma família de subconjuntos (não necessariamente disjuntos) de X. Então o número de elementos no universo X que não estão em nenhum dos suconjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, é*

$$\left| X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = |X| + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{\substack{S \subseteq [n] \\ |S|=k}} \left| \bigcap_{i \in S} A_i \right|.$$

Demonstração. Escrevamos por extenso a expressão acima

$$\begin{array}{ccc} |X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i| & = & |X| \\ & - & \sum_{i=1}^{n} |A_i| \\ & + & \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| \\ & - & \sum_{1 \le i < j < l \le n} |A_i \cap A_j \cap A_l| \\ & + & \\ & \vdots & \\ & +(-1)^k & \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| \\ & \vdots & \\ & +(-1)^n & |A_1 \cap \cdots \cap A_n|. \end{array}$$

Consideremos x um elemento arbitrário de X. Se x está em $X \setminus \bigcup_{i=1}^{n}$, é contado, no lado esquerdo da expressão, exactamente uma vez, e zero vezes, caso contrário. Temos de mostrar que o mesmo acontece no lado direito. Suponhamos que x está exactamente em k ($0 \le k \le n$) subconjuntos $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$ (*não estando em nenhum outro* A_j). (Quando $k = 0$ significa que o elemento não está em nenhum deles.) O número de vezes que x é contado no segundo membro da expressão acima, linha a linha, é

1 vez no termo $|X|$;

depois k vezes, uma por cada $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$;

depois $\binom{k}{2}$ vezes, uma por cada $A_{i_1} \cap A_{i_2}, A_{i_1} \cap A_{i_3}, \ldots, A_{i_{k-1}} \cap A_{i_k}$;

depois $\binom{k}{3}$ vezes, uma por cada $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}, A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_4}, \ldots, A_{i_{k-1}} \cap A_{i_{k-2}} \cap A_{i_k}$, e assim sucessivamente.

No total x é contado exactamente

$$1 - \binom{k}{1} + \binom{k}{2} - \binom{k}{3} + \cdots + (-1)^k \binom{k}{k} = \begin{cases} 0, & \text{se } k > 0 \\ 1, & \text{se } k = 0 \end{cases}$$

vezes. O que significa que a expressão acima está correcta. □

Ou ainda:

O número de elementos em um ou mais dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, é

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = X \setminus \left(X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) \qquad \left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = |X| - \left| X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right|$$

Ou seja,

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{S \subseteq [n] \\ |S|=k}} \left| \bigcap_{i \in S} A_i \right|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| +$$

$$+ \sum_{1 \leq i < j < l \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_l| - \cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \cdots \cap A_n| .$$

3.1 Aplicações

3.1.1 Contar funções sobrejectivas entre conjuntos finitos: uma fórmula

- *Quantas funções sobrejectivas existem de um conjunto R com r elementos para um conjunto N com n elementos?*

  Seja $N = \{1, \ldots, n\}$. Queremos enumerar o conjunto

  $$\{f : R \to N; 1, \ldots, n \in f(R)\} = \{f : R \to N;\ N = f(R)\}.$$

- *Quantas funções há de R para N cuja imagem contém todos os elementos de N?*

- *Quantas funções há de R para N cuja imagem não contém todos os elementos de N?* Consideremos

  $$A_i = \{f : R \to N; i \notin f(R)\} = \{f : R \to N \setminus \{i\}\} \quad i = 1, \ldots, n$$

  e

  $$X = \{f : R \to N\}, \quad |X| = n^r.$$

  Então

  $$X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{f : R \to N; 1, \ldots, n \in f(R)\} = \{f : R \to N;\ N = f(R)\}.$$

Contar funções sobrejectivas entre conjuntos finitos: uma fórmula

$$|X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i| = |X| - |\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = n^r - |\bigcup_{i=1}^{n} A_i|$$

$$|A_i| = |\{f : R \to N \setminus \{i\}\}| = (n-1)^r$$

$$\sum_{i=1}^{n} |A_i| = n(n-1)^r$$

$$|A_i \cap A_j| = |\{f : R \to N \setminus \{i, j\}\}| = (n-2)^r$$

$$\sum_{\{i,j\} \subseteq [n]} |A_i \cap A_j| = \binom{n}{2}(n-2)^r$$

$\vdots$

$$|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = |\{f : R \to N \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}\}| = (n-k)^r$$

$$\sum_{\{i_1,\ldots,i_k\} \subseteq [n]} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = \binom{n}{k}(n-k)^r.$$

Então,

$$|X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i| = |X| - |\bigcup_{i=1}^{n} A_i| =$$

$$= n^r - n(n-1)^r + \binom{n}{2}(n-2)^r - \binom{n}{3}(n-3)^r + \cdots$$

$$+(-1)^k \binom{n}{k}(n-k)^r + \cdots + \binom{n}{n}(n-n)^r.$$

$$= \binom{n}{0}n^r - \binom{n}{1}(n-1)^r + \binom{n}{2}(n-2)^r - \binom{n}{3}(n-3)^r + \cdots$$

$$+(-1)^k \binom{n}{k}(n-k)^r + \cdots + \binom{n}{n}(n-n)^r$$

O número de funções sobrejectivas de R para $N = \{1, \ldots, n\}$ é igual a

$$|X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k}(n-k)^r = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^r, \text{ transformação de índices } k \to n-k. \tag{3.1}$$

3.1.2 Outro exemplo

- Quantas palavras há de 10 letras que contêm todas as cinco vogais?

- Quantas palavras há de 10 letras que não contêm todas as cinco vogais? (Use o alfabeto com 26 letras.)

- $S_a = \{\text{palavras de 10 letras sem a vogal } a\}$

  $S_e = \{\text{palavras de 10 letras sem a vogal } e\}$

  $S_i = \{\text{palavras de 10 letras sem a vogal } i\}$

  $S_o = \{\text{palavras de 10 letras sem a vogal } o\}$

  $S_u = \{\text{palavras de 10 letras sem a vogal } u\}$

- $|S_a \cup S_e \cup S_i \cup S_o \cup S_u| = (|S_a| + |S_e| + |S_i| + |S_o| + |S_u|)$

  $- \sum_{\{f,j\} \subseteq \{a,e,i,o,u\}} |S_f \cap S_j|$

  $+ \sum_{\{f,j,k\} \subseteq \{a,e,i,o,u\}} |S_f \cap S_j \cap S_k|$

  $- \sum_{\{f,j,k,l\} \subseteq \{a,e,i,o,u\}} |S_f \cap S_j \cap S_k \cap S_l|$

  $+|S_a \cap S_e \cap S_i \cap S_o \cap S_u|$

- $\sum_{\{f\} \subseteq \{a,e,i,o,u\}} |S_f| = \binom{5}{1}.25^{10}$

  $\sum_{\{f,j\} \subseteq \{a,e,i,o,u\}} |S_f \cap S_j| = \binom{5}{2}.24^{10}$

  $\sum_{\{f,j,k\} \subseteq \{a,e,i,o,u\}} |S_f \cap S_j \cap S_k| = \binom{5}{3}.23^{10}$

  $\sum_{\{f,j,k,l\} \subseteq \{a,e,i,o,u\}} |S_f \cap S_j \cap S_k \cap S_l| = \binom{5}{4}.22^{10}$

  $|S_a \cap S_e \cap S_i \cap S_o \cap S_u| = \binom{5}{5}.21^{10}$

  Número de palavras com dez letras, num alfabeto com 26 letras, que não contêm uma ou mais vogais:

$$|S_a \cup S_e \cup S_i \cup S_o \cup S_u| =$$

$$= \binom{5}{1}.25^{10} - \binom{5}{2}.24^{10} + \binom{5}{3}.23^{10} - \binom{5}{4}.22^{10} + \binom{5}{5}.21^{10} = \sum_{k=1}^{5} (-1)^{k+1} \binom{5}{k} (26-k)^{10}.$$

3.1.3 Outra formulação

Dado um conjunto finito de objectos, cada um dos quais pode ter ou não a propriedade $1, 2, \ldots, n$, seja $N(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ o número de objectos que têm pelo menos as propriedades $i_1, i_2, \ldots, i_k$. Então o número de objectos que têm pelo menos uma das propriedades 1,2,..., n, é

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n} N(i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} N(i_1, i_2) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} N(i_1, i_2, i_3) + \cdots + \\ + \quad & (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} N(i_1, \ldots, i_k) + \cdots + (-1)^{n-1} N(1, 2, \ldots, n) \\ = \quad & \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} N(i_1, \ldots, i_k). \end{aligned}$$

3.2 Desencontros e Encontros

3.2.1 Desencontros

- Uma permutação dos primeiros n inteiros sem que nenhum ocupe a sua posição natural é chamada um *desencontro de comprimento* n. O número de desencontros de $\{1, \ldots, n\}$ é denotado por D_n.

- Em geral, um *desencontro* de uma lista de n elementos é uma permutação desses elementos tal que nenhum elemento aparece na sua posição original. Por exemplo,

$$241635$$

- **Problema.** *Determinar* D_n*, o número de desencontros de* $\{1, 2, \ldots, n\}$.

  Resolução. *"propriedade* i*"= permutação de* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *onde o elemento* i *está na sua posiçã* $i = 1, \ldots, n$

  $N(i_1, i_2, \ldots, i_k) =$ número de permutações de $\{1, 2, \ldots, n\}$ com pelo menos os elementos $i_1, i_2, \ldots, i_k$ na sua posição natural

$$= (n-k)!$$

  Número total de permutações de $\{1, 2, \ldots, n\}$ com pelo menos k elementos fixos (k elementos na sua posição natural)

$$\sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} N(i_1, i_2, \ldots, i_k) = \binom{n}{k} (n-k)!$$

  Queremos contar as permutações que não verificam nenhuma das *propriedades* $1, 2, \ldots, n$

Desencontros

- $$\begin{aligned} D_n &= n! - (N(1) + \cdots + N(n)) + (N(1,2) + N(1,3) + \cdots + N(n-1,n)) - \\ &\quad -(N(1,2,3) + \cdots + N(n-2,n-1,n)) + \cdots + (-1)^n N(1,\ldots,n) \\ &= n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)! + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} 0! \\ &= n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right] \\ &= n! \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{1}{i!} \\ &\approxeq n!/e. \end{aligned}$$

`Recorde da análise que`

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} x^i/i!, \quad e^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{i!} = \frac{D_n}{n!} + (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)!} + \cdots$$

Pegando numa permutação de n elementos ao acaso a probabilidade de ela não ter pontos fixos é cerca de $1/e$ ou 37%.

$$\frac{D_n}{n!} \approx \frac{1}{e} > \frac{1}{3}.$$

Exemplo 3.1. De quantas maneiras poderão ser metidas n cartas em n envelopes sem que ninguém receba a carta que lhe é dirigida?

$D_1 = 0,\ D_2 = 1,\ D_3 = 2,\ D_4 = 9$

$$D_3/3! = 2/6 = 1/3,\ D_4/4! = 9/24 > 1/3$$

3.2.2 Encontros

Definição 3.1. As permutações dos inteiros $\{1, \ldots, n\}$ onde alguns se encontram nas suas posições naturais são chamadas encontros. $E(r, n)$ denota o número de permutações dos inteiros $\{1, \ldots, n\}$ onde precisamente r entre os n números se econtram nas suas posições naturais. (Ou seja, o número de permutações com r pontos fixos. Em particular, $E(n, n) = 1$.

Para cada escolha de r pontos fixos numa permutação de $\{1, \ldots, n\}$, existem D_{n-r} desencontros. No total existem $\binom{n}{r}$ escolhas de r pontos fixos numa permutação de $\{1, \ldots, n\}$. Portanto,

$$E(r, n) = \binom{n}{r} D_{n-r}.$$

(Definimos $D_0 := 1$.) Em particular, $E(0, n) = D_n$.

Classificando as $n!$ permutações de $\{1, \ldots, n\}$ relativamente ao número de elementos fixos, isto é, o número de inteiros que não sairam da sua posição natural, tem-se

$$\sum_{r=0}^{n} E(r, n) = n!.$$

De quantas maneiras poderão ser enviadas n cartas de tal modo que que r cheguem aos seus destinatários e $n - r$ cheguem trocadas?

$$E(r, n) = \binom{n}{r} D_{n-r}.$$

Em particular, $E(0, n) = D_n$, $E(n - 1, n) = D_1 = 0$.

Exemplo 3.2. Conte todas as permutações de $\{1, 2, \ldots, n\}$ em que o 1 não está na primeira posição.

Contemos todas as permutações em que 1 (pelo menos) está na primeira posição: $(n-1)!$

$$n! - (n - 1)! = (n - 1)(n - 1)!$$

CAPÍTULO 4

BOLAS EM CAIXAS

4.1 Bolas distintas em caixas distintas: funcões

De quantas maneiras podem ser colocadas r bolas distinguíveis em n caixas distinguíveis?

Uma distribuição de r bolas distintas por n caixas distintas, podendo haver caixas vazias, fica caracterizada dizendo para cada objecto qual a caixa onde ele vai ficar. Como há r objectos e cada um tem n escolhas possíveis, o número de distribuições é

$$n^r.$$

Se $|R| = r$ e $|N| = n$, quantas funções existem de R para N?

Uma função $f : \{1, \ldots, r\} \to \{1, \ldots, n\}$ fica caracterizada pela lista $(f(1), f(2), \ldots, f(r))$. Como qualquer elemento desta lista pode tomar qualquer valor em $\{1, \ldots, n\}$, então o número total de listas distintas é n^r,

$$|\{f : R \to N\}| = |\underbrace{N \times \cdots \times N}_{|R|}| = |N|^{|R|} = n^r$$

4.1.1 Funções injectivas/colocar no máximo uma bola por caixa

O número total de funções de R para N é

$$|\{f : R \to N\}| = n^r = |N|^{|R|}.$$

- Quantas destas funções são injectivas?

$$n(n-1)\cdots(n-r+1) = \prod_{i=1}^{r}(n-i+1).$$

- Quando $n = r$ temos $n!$ funções bijectivas.

4.1.2 Bolas distintas em caixas distintas sem caixas vazias: funções sobrejectivas

- *De quantas maneiras podem ser colocadas r bolas distintas em n caixas distintas com nenhuma vazia?*

- *Quantas funções sobrejectivas existem de um conjunto R com r elementos para um conjunto N com n elementos?*

- Pelo princípio da inclusão-exclusão e (3.1) sabemos que existem

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^r = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^r.$$

Partições ordenadas de conjuntos

Definição 4.1. Se R é a união disjunta dos conjuntos $A_1, \ldots, A_n$, dizemos que a lista ordenada $A_1, \ldots, A_n$ é uma partição ordenada de A podendo haver partes vazias. Chamamos a $A_1, \ldots, A_n$ os blocos de R, e às respectivas cardinalidades os tamanhos dos blocos. Temos

$$R = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i, \quad |A_i| \geq 0, \quad |R| = |A_1| + \ldots + |A_n|.$$

- Seja $f : R \to N$, uma função de R para N, onde $N = \{y_1, \ldots, y_n\}$. Consideremos

  $A_1 = \{x \in R : f(x) = y_1\}$

  $A_2 = \{x \in R : f(x) = y_2\}$

  $\vdots$

  $A_n = \{x \in R : f(x) = y_n\}$

- A função f fica caracterizada pela lista ordenada $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ de n subconjuntos de R (as pré-imagens de $y_1, y_2, \ldots, y_n$), podendo alguns deles ser o conjunto vazio, no caso em que a função não é sobrejectiva. Então $R = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i$ e dizemos que $(A_1, \ldots, A_n)$ forma uma partição *ordenada*, podendo haver partes vazias, do conjunto R.

Proposição 4.1. *O número de funções sobrejectivas de R para N, $|\{f : R \to N, f \text{ sobrejectiva}\}|$ = número de partições ordenadas de R em n partes não vazias .*

Nas Secções 4.2 e 4.4 usaremos partições ordenadas de conjuntos sem partes vazias para contar funções sobrejectivas e obter novas fórmulas para este número.

4.2 Bolas distintas em caixas iguais: Números de Stirling de segunda espécie

- Os nossos objectos combinatórios de estudo são agora *as partições não ordenadas dum conjunto em conjuntos não vazios*,

  $R = A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_n$ união disjunta de conjuntos $A_1, \ldots, A_n$ não vazios.

Exemplo 4.1. $R = \{1,2,3,4,5\}$ tem $2^4 - 1 = 15$ (exercício 17 da folha de problemas) partições em 2 conjuntos; e $R = \{1,2,3,4,5,6\}$ tem $2^5 - 1 = 31$ partições em 2 conjuntos:

1234|5	123|45	145|23
1235|4	124|35	234|15
1345|2	125|34	235|14
1245|3	134|25	245|13
2345|1	135|24	345|12

12345|6	1234|56	1246|35	123|456
12346|5	1235|46	1346|25	124|356
12356|4	1245|36	2346|15	134|256
12456|3	1345|26	1256|34	234|156
13456|2	2345|16	1356|24	125|346
23456|1	1236|45	2356|14	135|246
		1456|23	235|146
		2456|13	145|236
		3456|12	245|136
			345|126

- De quantas maneiras podemos distribuir 5 bolas distintas por 2 caixas iguais sem deixar caixas vazias?
- De quantas maneiras podemos distribuir 6 bolas distintas por 2 caixas iguais sem deixar caixas vazias?
- *De quantas maneiras podemos colocar r bolas distintas em n caixas iguais sem caixas vazias?*
- *Quantas partições não ordenadas de um conjunto de r elementos em n partes não vazias existem?*

Definição 4.2. O número de Stirling $S_{r,n}$ (de segunda espécie) é o número de partições (não ordenadas) em n partes (não vazias) de um conjunto de r elementos. Alguns valores,

$$S_{r,n} = 0,\ n > r \geq 0, \quad S_{r,1} = 1 = S_{r,r},\ r \geq 1$$

$$S_{r,2} = 2^{r-1} - 1$$

Por convenção, escrevemos $S_{0,0} := 1$. (Uma explicação: o número de maneiras de distribuir 0 bolas por 0 caixas é não fazer nada.)

Definição 4.3. O número de todas as partições (não ordenadas e em partes não vazias) de um conjunto com r elementos é o número de Bell $Bell(r)$,

$$Bell(r) = \sum_{k=1}^{r} S_{r,k}$$

$$Bell(0) := 1$$

Proposição 4.2. *O número de funções sobrejectivas de R para N, $|\{f : R \to N, f \text{ sobrejectiva}\}| =$ $=$ número de partições ordenadas de R em n partes não vazias $= n!S_{r,n}$.*

- Quantas funções sobrejectivas existem de $R = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ para $N = \{1, 2\}$?

$$2!S_{5,2} = 2!(2^4 - 1)$$

- (Exercício 39 das folhas de problemas) Quantas funções sobrejectivas existem de $R = \{1, \ldots, r\}$ para $N = \{1, 2\}$?

$$2!S_{r,2} = 2!(2^{r-1} - 1)$$

- $|R| = r$, $|N| = n$

$$S_{r,n} = \frac{1}{n!} |\{f : R \to N, f \text{ sobrejectiva}\}|$$

- *De quantas maneiras podemos colocar r bolas distintas em n caixas iguais sem caixas vazias?*

$$S_{r,n}$$

- *De quantas maneiras podemos colocar r bolas distintas em n caixas iguais (podendo deixar caixas vazias)?*

$$\sum_{k=1}^{n} S_{r,k} = S_{r,1} + S_{r,2} + \cdots + S_{r,n} = Bell(r).$$

4.2.1 Uma fórmula para os números de Stirling de segunda espécie e funções sobrejectivas

De (3.1) e (4.2) obtemos

$$S_{r,n} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^r.$$

Nota 4.1. Se $r > 0, n = 0$, $S_{r,0} = \frac{1}{0!}(-1)^{0-0}\binom{0}{0} 0^r = 0.$

4.2.2 Números de Stirling (segunda espécie): algumas fórmulas

- R não vazio, $|R| = r$.
- $S_{r,1} = 1 = S_{r,r}$, $r \geq 1$
- $S_{r,2} = 2^{r-1} - 1$ (exercício 17 das folhas), número de maneiras de partir um conjunto R de r elementos em duas partes (não vazias). Contar partições de R em dois blocos $\{A, R \setminus A\}$ com A não vazio e $A \neq R$.

$$S_{r,2} = 2^{r-1} - 1$$

- $S_{r,r-1} = \binom{r}{2}$.

  Uma partição de R em $r-1$ blocos (não vazios) consiste exactamente de um bloco com 2 elementos de R e os restantes $r-2$ blocos (não ordenados) com apenas um elemento cada, retirado de entre os $r-2$ elementos que sobraram depois de ter feito a escolha do bloco de dois elementos o qual pode ser escolhido de $\binom{r}{2}$ maneiras.

- $R = \{1, 2, 3, 4\}$

  $S_{4,3} = \binom{4}{2}$ partições de R em três partes

  12|3|4

  13|2|4

  14|2|3

  23|1|4

  24|1|3

  34|1|2

- Quantas funções sobrejectivas existem de um conjunto de r elementos para um conjunto de $r-1$ elementos?

$$(r-1)!\binom{r}{2} = (r-1)!S_{r,r-1}$$

4.2.3 Números de Stirling (segunda espécie): uma relação de recorrência

Proposição 4.3.

$$S_{r,k} = S_{r-1,k-1} + kS_{r-1,k}, \ r \geq 1.$$

Demonstração. O lado esquerdo da igualdade conta o número de maneiras de partir R em k partes. Agora vamos contar doutra maneira. Fixemos $x \in R$, onde $|R| = r$. Então x forma um bloco de tamanho 1 ou está num bloco de tamanho pelo menos dois.

No lado direito, a primeira parcela conta todas as partições de R em k partes sendo $\{x\}$ um bloco de tamanho 1, e a segunda parcela conta aquelas partições de R em k partes onde x aparece num bloco de tamanho ≥ 2.

Neste último caso, um tal bloco pode ser obtido acrescentando x a qualquer um dos k blocos de uma partição de $R \setminus \{x\}$ em k partes. O número de maneiras de partir $R \setminus \{x\}$ em k blocos é $S_{r-1,k}$. Portanto, para cada maneira de partir $R \setminus \{x\}$ em k blocos,

$$R \setminus \{x\} = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_K$$

x é acrescentado, à vez, a cada um dos k blocos, dando origem a k partições de R em k partes onde x aparece num bloco de tamanho

- Ao acrescentarmos x, de todas as maneiras possíveis, a cada $R \setminus \{x\} = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_K$, cada partição de $R \setminus X$ dá origem a k novas partições,

  $R = (A_1 \cup \{x\}) \cup A_2 \cup \cdots \cup A_K$

  $R = A_1 \cup (A_2 \cup \{x\}) \cup A_3 \cup \cdots \cup A_K$

  $\vdots$

  $R = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup (A_K \cup \{x\})$

- Ou seja, x aparece em $kS_{r-1,k}$ blocos de tamanho ≥ 2.

$\square$

Corolário 4.4.

$$\begin{aligned} S_{r,r-1} &= S_{r-1,r-2} + (r-1)S_{r-1,r-1} \\ &= S_{r-2,r-3} + (r-2)S_{r-2,r-2} + (r-1) \\ &= \cdots \\ &= S_{3,2} + 3 \cdots + (r-2) + (r-1) \\ &= S_{2,1} + 2 + \cdots + (r-2) + (r-1) \\ &= 1 + 2 + \cdots + (r-2) + (r-1) = r(r-1)/2 \\ &= \binom{r}{2} \end{aligned}$$

4.2.4 Números de Stirling de segunda espécie e contar funções entre conjuntos finitos

O número total de funções sobrejectivas de $f : [r] \to [m]$ é igual a $m!S_{r,m}$, onde $S_{r,m}$ é o número de partições (não ordenadas) do conjunto $[r]$ em m partes não vazias.

- Toda a função $f : [r] \to [m]$ pode ser considerada como uma função sobrejectiva $f : [r] \to Y$ onde $Y = f([r])$. Então

$$\begin{aligned} m^r &= |\{f : [r] \to [m]\}|, \\ & \quad \text{classificando as funções de acordo com a imagem } Y \subseteq [m], \\ &= \sum_{Y \subseteq [m]} |\{f : [r] \to Y, \text{f sobrejectiva}\}| \\ & \quad \text{classificando os subconjuntos } Y \subseteq [m] \text{ de acordo com a cardinalidade,} \\ &= \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{\substack{|Y|=k \\ Y \subseteq [m]}} |\{f : [r] \to Y, \text{f sobrejectiva}\}| \right) \end{aligned}$$

- Note que

$$\sum_{\substack{|Y|=k \\ Y \subseteq [m]}} |\{f : [r] \to Y, \text{f sobrejectiva}\}| = \sum_{\substack{|Y|=k \\ Y \subseteq [m]}} k!S_{r,k} = \binom{m}{k} k!S_{r,k},$$

  (Quantas parcelas tem esta soma?)

  onde $S_{r,0} = 0$, para $r > 0$.

- Donde

$$\begin{aligned} m^r &= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} k!S_{r,k} \\ &= \sum_{k=0}^{m} S_{r,k} m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1) \\ &= \sum_{k=0}^{r} S_{r,k} m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+2)(m-k+1), \end{aligned}$$

Nota 4.2. Se $r < m$, a soma pode parar em n porque $S_{r,k} = 0$ para $k > r$. Ou seja,

$$m^r = \sum_{k=0}^{r} S_{r,k} m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1).$$

Em particular, para $r = 0$, vem $m^0 = \sum_{k=0}^{0} S_{0,k} \prod_{i \in \{0,1,\ldots,k-1\}} (m-i) = S_{0,0}. \prod_{i \in \emptyset} = S_{0,0}.1 = 1.$

Nota 4.3. Recorde que, na teoria dos conjuntos, uma função $f : A \to B$ é um subconjunto f de $A \times B$ tal que

- se $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $(x, y) \in A \times B$, e tal elemento y é único.

De acordo com esta definição, se $A = \emptyset$ e $B \neq \emptyset$ então existe exactamente uma função de A para B, $1 = |B|^0$.

Se $A \neq \emptyset$ e $B = \emptyset$ então não existe nenhuma função de A para B, $0^{|A|} = 0$. Donde, $|\{f : [r] \to \emptyset\}| = 0$.

Exemplo Para $r = 4 = m$, obtemos

$$4^4 = S_{4,0}1 + S_{4,1}4 + S_{4,2}4(4-1) + S_{4,3}4(4-1)(4-2) + S_{4,4}4(4-1)(4-2)(4-3)$$

$$= 0.1 + 4 + (2^3 - 1)4(4-1) + \binom{4}{2}4(4-1)(4-2) + 4(4-1)(4-2)(4-3) = 256.$$

4.3 Bolas iguais em caixas distintas

4.3.1 Composições

Definição 4.4. Uma composição de $n > 0$ é uma maneira de exprimir n como uma soma ordenada de inteiros positivos. Ou seja, é uma partição ordenada do número n. Uma composição de n com comprimento k é uma composição de n com k partes (positivas), isto é, é uma expressão da forma

$$n = a_1 + \cdots + a_k,\ a_i > 0,\ i = 1, \ldots, k.$$

Exemplo 4.2. As composições de $n = 3$,

$$1 + 1 + 1,\ \ 1 + 2,\ \ 2 + 1,\ \ 3.$$

$1 + 1 + 1$ é uma composição de comprimento 3.

Definição 4.5. Uma composição fraca é uma maneira de exprimir $n \geq 0$ como uma soma ordenada de inteiros não negativos. Uma composição fraca de n de comprimento k é uma expressão da forma

$$n = a_1 + \cdots + a_k,\ a_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, k.$$

Proposição 4.5. *Existem 2^{n-1} composições de n. Existem $\binom{n-1}{k-1}$ composições de n com comprimento k.*

Demonstração. Escreva $n = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1$, uma composição de n em n partes. Temos n, $1's$, e $n-1$, +'s. Qualquer outra composição de n resulta de selecionar algumas posições com, +'s, apagar esses " + ", e, em seguida, agrupar, numa parte, os 1's consecutivos. O número de 1's agrupados constitui essa parte.

Essa selecção de posições com " + " é o mesmo que seleccionar um subconjunto de um conjunto de $n-1$ elementos. No total, podemos formar 2^{n-1} subconjuntos.

Exemplo 4.3. $6 = 1+1+1+1+1+1$ é uma composição de 6 com 6 partes.

Apagando o primeiro e os dois últimos $'+'$, ficamos com $11+1+111$, ou seja, $2+1+3$. Apagando todos os " + ", obtemos 111111, dando origem à partição de 6 apenas com uma parte, 6. Não selecionar nehum " + ", ficamos com a partição de 6 em 6 partes.

Uma composição com k partes (tem $k-1$, +'s), resulta de apagar $n-k$, +'s, em $n = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1$

$n - 1 - x = k - 1,\ x = (n-1) - (k-1) = n - k$

O número de maneiras de o fazer é igual a

$$\binom{n-1}{n-k} = \binom{n-1}{n-1-(n-k)} = \binom{n-1}{k-1}.$$

□

4.3.2 Composições fracas

Proposição 4.6. *Existem* $\binom{n+k-1}{k-1}$ *composições fracas de* n *com comprimento* k.

Demonstração. Seja $n = a_1 + \cdots + a_k$ com $a_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, k$.

$$n = a_1 + \cdots + a_k \Leftrightarrow n + k = (a_1 + 1) + \cdots + (a_k + 1)$$

$$\Leftrightarrow n + k = b_1 + \cdots + b_k,\ b_i \geq 1,\ i = 1, \ldots, k$$

Contar composições facas de n com comprimento k é o mesmo que contar composições de $n+k$ de comprimnto k.

Quantas composições de $n+k$ de comprimento k existem?

Pela proposição anterior existem

$$\binom{n+k-1}{k-1}.$$

□

4.3.3 Contar soluções em inteiros não negativos de equações lineares diofantinas

Número de solucões em inteiros não negativos da equação linear diofantina $x_1 + \cdots + x_k = n$ é igual ao número de composições fracas de comprimento k, e ainda é igual ao número de maneiras de distribuir n bolas iguais em k caixas distintas (podendo deixar caixas vazias), ou seja, $\binom{n+k-1}{k-1}$.

As soluções em inteiros não negativos da equação linear diofantina $x_1 + \cdots + x_k = n$ são todas as composições fracas de n com comprimento k. As distribuições de n bolas iguais por k caixas distintas (podendo deixar caixas vazias) estão em correspondência, um a um, com as composições fracas de n com comprimento k.

Número de solucões em inteiros positivos da equação $x_1 + \cdots + x_k = n$ é igual ao número de composições de comprimento k, e ainda é igual ao número de maneiras de colocar n bolas iguais em k caixas distintas *sem deixar caixas vazias*, ou seja $\binom{n-1}{k-1}$.

- O conjunto das sequências binárias de n uns e $k-1$ zeros, o conjunto das soluções em inteiros não negativos da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$, e o conjunto das composições fracas de n com comprimento k, estão em bijecção entre si.

- $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in \mathbb{Z}^k_{\geq 0}$ é uma solução em inteiros não negativos da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$, se e só se $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n$, isto é, $a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ é uma partição fraca de n em k partes.

- Consideremos a correspondência

$$\begin{aligned} + &\longleftrightarrow 0 \\ a \in \mathbb{Z}_{\geq 0} &\longleftrightarrow \underbrace{11\cdots 1}_{a} \end{aligned}$$

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in \mathbb{Z}^k_{\geq 0},\ a_1 + \cdots + a_k = n \rightarrow \qquad \underbrace{\underbrace{11\cdots 1}_{a_1}0\underbrace{11\cdots 1}_{a_2}0\cdots 0\underbrace{11\cdots 1}_{a_k}}_{\text{palavra binária com } k-1 \text{ zeros e } n \text{ uns}} \qquad .$$

Exemplo 4.4. Para $n = 8,\ k = 4,\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$,

$(3, 4, 0, 1) \in \mathbb{Z}^4_{\geq 0} \longleftrightarrow 3 + 4 + 0 + 1 = 8 \longleftrightarrow 11101111001$

Concluímos então que

Teorema 4.7. *O número de soluções em inteiros não negativos da equação* $x_1 + \cdots + x_k = n$ *é*

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}$$

que é também igual ao número de composições fracas de comprimento k de n e, por sua vez, igual ao número de sequências binárias de n uns e $k-1$ zeros. O número destas sequências binárias de comprimento $n+k-1$ é igual ao número de escolhas de $k-1$ posições para os dígitos zeros (equivalentemente n posições para os dígitos uns) de entre as $n+k-1$ posições.

Exemplo 4.5. Para $n = 8,\ k = 4,\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$,
$3 + 3 + 0 + 2 = 8 \longleftrightarrow 11101110011$

4.3.4 Bolas iguais em caixas distintas e palavras binárias

Existe uma bijecção entre as diferentes maneiras de colocar k bolas iguais em n caixas distintas e o conjunto das sequências binárias de k us e $n-1$ zeros.

Utilizando $n-1$ separadores | para separar as n caixas, podemos representar uma colocação de bolas do seguinte modo

$$\underbrace{k_1\ bolas|k_2\ bolas|\cdots|k_n\ bolas}_{k=k_1+\cdots+k_n\ bolas} \longrightarrow \underbrace{1\cdots1}_{k_1}0\underbrace{1\cdots1}_{k_2}0\cdots0\underbrace{1\cdots1}_{k_n}$$

e produzir uma sequência binária de k 1's e $n-1$ zeros.

$$\text{separador} \leftrightarrow 0$$

$$bola \leftrightarrow 1$$

a sequência binária 111001 dá-nos uma maneira de colocar quatro bolas iguais em três caixas distintas: 3 bolas na primeira caixa, zero bolas na segunda e 1 bola na terceira.

O número de maneiras de colocar k bolas iguais em n caixas distintas é $\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$.

4.3.5 Combinações com repetição

Algumas perguntas com a mesma resposta

Quantas

- sequências binárias existem de $k-1$ zeros e n uns?
- palavras existem com n N's e $(k-1)$ E's?
- sequências binárias existem com n 1's e $(k-1)$ +'s?
- soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ existem?
- maneiras existem de colocar n bolas iguais em k caixas distintas?
- maneiras existem de distribuir n laranjas por k crianças?

- maneiras existem de escolher n peças de fruta de k tipos diferentes podendo repetir?
- maneiras existem de escolher, com repetição permitida, n objectos de k objectos distinguíveis?

$$\binom{n+k-1}{n} = \binom{n+k-1}{k-1}$$

- Se seleccionarmos 3 peças de fruta, com repetição permitida, de laranjas, bananas, pêras e maças, podemos seleccionar 3 laranjas, ou 1 laranja, 1 banana, e 1 pêra, ou etc. No total

$$20 = \binom{3+4-1}{3}$$

- Número de maneiras de retirar 5 cartas de um baralho (52 cartas), repondo a carta após cada extração,

$$\binom{5+52-1}{5}$$

4.3.6 Multiconjuntos

Definição de multiconjunto.

- Informalmente um multiconjunto é um "conjunto"com possíveis repetições de elementos. Isto é, no conjunto cada objecto pode ter várias cópias.

  Exemplo: Um conjunto de 4 laranjas l, l, l, l, 3 bananas b, b, b. Este multiconjunto tem cadinal 7,

$$X = \{l, l, l, l, b, b, b\}$$

- Formalmente um multiconjunto M num conjunto finito $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ é um par (S, ν) onde $\nu : S \to \mathbb{Z}_0^+$ é uma função tal que $\sum_{i=1}^{n} \nu(s_i) = |M|$. Entendemos $\nu(s_i)$ como o número de repetições (cópias) de s_i.

  No exemplo anterior, X é um multiconjunto no conjunto $S = \{l, b\}$ onde $\nu : \{l, b\} \to \mathbb{Z}_0^+$ é definida por $\nu(l) = 4$ e $\nu(b) = 3$.

- Quantos multiconjuntos de 3 elementos existem em $S = \{l, b\}$?

  Quantas maneiras existem de escolher 3 elementos em S podendo repetir à vontade?

  Quantas maneiras existem de escolher três objectos de dois tipos, podendo repetir à vontade?

  Quantas partições fracas de 3 de comprimento dois existem?

Quantas soluções em inteiros não negativos da equação $x_1 + x_2 = 3$ existem?

$$\binom{3+2-1}{2-1}$$

$\{l, l, l\} \quad 3|0, \ \{l, l, b\} \quad 2|1, \ \{l, b, b\} \quad 1|2, \ \{b, b, b\} \quad 0|3$

Seja S um conjunto de n objectos distintos. Quantos multiconjuntos de k elementos podemos formar no conjunto S? Quantas maneiras existem de escolher k objectos de n tipos, podendo repetir?

$$\binom{k+n-1}{n-1} = \binom{k+n-1}{k}$$

Proposição 4.8. *O número de multiconjuntos de cardinal k que podemos formar no conjunto $[n]$ é igual a*

$$\binom{k+n-1}{n-1} = \binom{k+n-1}{k}.$$

Demonstração. Seja $S = [n]$ e A um multiconjunto formado em $[n]$, de cardinal k. Então, para cada $i = 1, \ldots, n$, existem $a_i \geq 0$ cópias de i em A tais que $a_1 + \cdots + a_n = k$. Quantas composições fracas de k com comprimento n existem? Tantas quantas as soluções em inteiros não negativos da equação $x_1 + \cdots + x_n = k$,

$$\binom{k+n-1}{n-1} = \binom{k+n-1}{k}.$$

□

Conjuntos e Multiconjuntos

Sejam n e k inteiros não negativos.

Recordemos

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &:= \# \text{ subconjuntos de } k \text{ elementos de um conjunto de } n \text{ elementos} \\ &= \# \text{ maneiras de escolher } k \text{ objectos distintos de } n \text{ objectos distintos} \end{aligned}$$

Introduzimos agora o número

Definição 4.6.

$$\begin{aligned} \left(\!\binom{n}{k}\!\right) &:= \# \text{ multiconjuntos de } k \text{ elementos que podemos formar num conjunto} \\ &\qquad \text{de } n \text{ elementos} \\ &= \# \text{ maneiras de escolher } k \text{ objectos de } n \text{ tipos diferentes, podendo repetir} \end{aligned}$$

chamado combinações com repetição de n a k.

Então

$$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \binom{k+n-1}{k}.$$

Exemplo 4.6. Quantas soluções em inteiros não negativos tem a inequação $x_1+\cdots+x_n \leq k$?

O número de soluções em inteiros não negativos da inequação $x_1 + \cdots + x_n \leq k$ é igual ao número de soluções em inteiros não negativos da equação $x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1} = k$, o qual é precisamente

$$\binom{k+n}{k} = \binom{k+n}{n}.$$

Exercício 4.1. Mostre que existe uma bijecção entre os conjuntos A e B definida por

$$A = \{(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} a_i = k\} \to B = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n} : \sum_{i=1}^{n} a_i \leq k\}$$
$$(a_1, \ldots, a_n, k - \sum_{i=1}^{n} a_i) \mapsto (a_1, \ldots, a_n).$$

4.3.7 Revisão

Bolas iguais em caixas distintas

- *De quantas maneiras podem ser colocadas r bolas indistinguíveis em n caixas distinguíveis?*

  Quantos multiconjuntos de cardinal r podemos formar num conjunto n elementos?

  Quantas composições fracas de r existem de comprimento n?

  Quantas soluções em inteiros não negativos tem a equação $x_1 + \cdots + x_n = r$?

  Quantas palavras binárias de comprimento $r + n - 1$ existem com $n - 1$ zeros?

$$\binom{r+n-1}{n-1} = \binom{r+n-1}{r} = \left(\!\!\binom{n}{r}\!\!\right)$$

- *De quantas maneiras podem ser colocadas r bolas indistinguíveis em n caixas distinguíveis sem caixas vazias?*

  Quantas composições de r existem com n partes?

  Quantas soluções em inteiros positivos tem a equação $x_1 + \cdots + x_n = r$?

  Quantas palavras binárias de comprimento $r + n - 1$ existem com $n - 1$ zeros e não havendo dois zeros consecutivos?

$$\binom{r-1}{n-1} = \binom{r-1}{r-n}$$

4.3.8 Função geradora dos multiconjuntos de $[n]$

- $(1 + x_1 + x_1^2 + x_1^3 + \cdots)$ função geradora dos multiconjuntos de $[1]$

O termo x_1^i nesta expressão indica que temos i cópias de 1 que constituem o multiconjunto $\{1, \ldots, 1\}$ de cardinal i.

- função geradora dos multiconjuntos de $[2]$

$(1 + x_1 + x_1^2 + x_1^3 + \cdots)(1 + x_1 + x_1^2 + x_1^3 + \cdots) = 1$ (multiconjunto de cardinal 0)

$+x_1 + x_2$ (multiconjuntos de cardinal 1)

$+x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$ (multiconjuntos de cardinal 2)

$+x_1^3 + x_2^3 + x_1x_2^2 + x_1^2x_2$ (multiconjuntos de cardinal 3)

$+x_1x_2^3 + x_1^3x_2 + x_1^2x_2^2 + x_1^4 + x_2^4$ (multiconjuntos de cardinal 4)

$+\cdots$

O termo $x_1^ix_2^j$ nesta expressão indica que temos i cópias de 1 e j cópias de 2 que constituem o multiconjunto $\{\underbrace{1, \ldots, 1}_{i}, \underbrace{2, \ldots, 2}_{j}\}$ de cardinal $i + j$. $\left(\!\binom{2}{0}\!\right) = 1 \quad \left(\!\binom{2}{1}\!\right) = 2 \quad \left(\!\binom{2}{2}\!\right) = 3 \quad \left(\!\binom{2}{3}\!\right) = \binom{2+3-1}{2-1} = 4$

$\left(\!\binom{2}{4}\!\right) = \binom{2+4-1}{2-1} = 5$

- $x_1 = x_2 = x$

função geradora dos multiconjuntos de $[2]$ com respeito ao cardinal

$(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^2 = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \cdots$

Função geradora dos multiconjuntos de $[n]$

$$\underbrace{(1 + x_1^1 + x_1^2 + \cdots)(1 + x_2^1 + x_2^2 + \cdots) \cdots (1 + x_n^1 + x_n^2 + \cdots)}_{n} = \sum_{\nu:[n]\to\mathbb{N}_0} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\nu(i)}$$

$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$

$$\sum_{\nu:[n]\to\mathbb{N}_0} x^{\nu(1)+\cdots+\nu(n)} = (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^n$$

$$\sum_{\text{M multiconjunto de } [n]} x^{|M|} = (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^n$$

$$\sum_{k\geq 0} \sum_{\substack{\text{M multiconjunto de } [n] \\ |M|=k}} x^k = (1+x+x^2+x^3+\cdots)^n$$

Para cada $k \geq 0$,

$$\sum_{\substack{\text{M multiconjunto de } [n] \\ |M|=k}} x^k = \left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) x^k$$

$$\sum_{k\geq 0} \left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) x^k = (1+x+x^2+x^3+\cdots)^n$$

4.3.9 Reciprocidade combinatorial

Extensão dos coeficientes binomiais a $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$)

• Para k inteiro não negativo, consideremos o polinómio

$$\binom{x}{k} := \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}.$$

As raízes deste polinómio são $0, 1, 2, \ldots, k-1$. Ou seja, $\binom{x}{k} = 0$ para $x = n$ inteiro não negativo tal que $0 \leq n < k$. Equivalentemente, $\binom{n}{k} = 0$ para $n < k$, como já tínhamos visto da definição enumerativa de $\binom{n}{k}$ onde n é inteiro não negativo.

Para $\alpha \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$), temos

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

Em particular, se k e n inteiros não negativos

$$\begin{aligned} \binom{-n}{k} &= \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-k+1)}{k!} \\ &= (-1)^k \frac{(n+k-1)(n+k-2)\cdots(n+1)n}{k!} \\ &= (-1)^k \binom{k+n-1}{k} = (-1)^k \left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right). \end{aligned}$$

Obtemos a chamada reciprocidade combinatorial

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = (-1)^k \binom{-n}{k}.$$

4.3.10 Combinações com repetição condicionada

Princípio da inclusão-exclusão

– O número de soluções em inteiros não negativos da equação $x_1 + \cdots + x_r = n$ é
$$\binom{n+r-1}{n}.$$

– O número de soluções em inteiros positivos da equação $x_1 + \cdots + x_r = n$ é
$$\binom{n-r+r-1}{n-r} = \binom{n-1}{n-r}, \quad \textit{se } n \geq r.$$

– *Qual é o número de soluções em inteiras não negativos da equação $x_1+\cdots+x_r = n$ com as restrição adicionais $x_i \geq s_i$, para todo o $i = 1, \ldots, r$?*

Começamos por colocar s_i bolas na caixa i, $i = 1, \ldots, r$ e ficamos com $n - \sum_{i=1}^{r} s_i$ bolas para distribuir à vontade por r caixas.
$$y_1 + \cdots + y_r = n - \sum_{i=1}^{r} s_i$$
onde $y_i = x_i - s_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, r$. O número de soluções, em inteiros não negativos, é 0, se $n - \sum_{i=1}^{r} s_i < 0$, caso contrário, é
$$\binom{n - \sum_{i=1}^{r} s_i + r - 1}{r-1}.$$

– *Qual é o número de soluções em inteiros não negativos da equação $x_1+\cdots+x_r = n$ com a restrição adicional $x_i < s$, para todo o $i = 1, \ldots, r$?*

O universo X é o conjunto de todas as soluções em inteiros não negativos da equação dada. A propriedade i significa que $x_i \geq s$, para $i = 1, \ldots, r$.

$A_1 = \{\ (x_1, \ldots, x_r) \in X\colon\ x_1 \geq s\}$

$A_2 = \{\ (x_1, \ldots, x_r) \in X\colon\ x_2 \geq s\}$

$\vdots$

$A_r = \{\ (x_1, \ldots, x_r) \in X\colon\ x_r \geq s\}$

O número de soluções em inteiros não negativos da equação $x_1 + \cdots + x_r = n$ satisfazendo $x_i < s$, para todo o $i = 1, \ldots, r$, é
$$|X \setminus \bigcup_{i=1}^{r} A_i| = |X| - \sum_{i=1}^{r} |A_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq r} |A_i \cap A_j| -$$
$$- \sum_{1 \leq i < j < l \leq r} |A_i \cap A_j \cap A_l| + \cdots + (-1)^r |A_1 \cap \cdots \cap A_r|.$$

– Seja $1 \leq j \leq r$. O número de soluções em inteiros não negativos de $x_1+\cdots+x_r = n$ com a condição $x_1 \geq s$, $x_2 \geq s$, $\ldots, x_j \geq s$ é

$$|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_j|$$

– Fazendo $y_1 = x_1 - s$, $y_2 = x_2 - s$, $\ldots, y_j = x_j - s$, e $y_i = x_i$, para $j < i \leq r$, o número acima é o mesmo que o número de soluções em inteiros não negativos da equação

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_j + y_{j+1} + \ldots + y_r = n - js.$$

– Este número é

$$|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_j| = \binom{n+r-js-1}{r-1}, \quad \text{se } n \geq js, \text{ e, } 0, \text{ caso contrário.}$$

–

$$\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_j\leq r} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_j}| = \binom{r}{j}\binom{n+r-js-1}{r-1} \quad \text{se } n \geq js, \text{ e,}$$

0, caso contrário.

– para $n \geq js$, ou seja, $1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n}{s} \right\rfloor$,

$$\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_j\leq r} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_j}| = \binom{r}{j}\binom{n+r-js-1}{r-1}.$$

–

$$|X \setminus \bigcup_{i=1}^{r} A_i| = |X| + \sum_{j=1}^{\left\lfloor \frac{n}{s} \right\rfloor} (-1)^j \binom{r}{j}\binom{n+r-js-1}{r-1}$$

–

$$|X \setminus \bigcup_{i=1}^{r} A_i| = \binom{n+r-1}{r-1} + \sum_{j=1}^{\left\lfloor \frac{n}{s} \right\rfloor} (-1)^j \binom{r}{j}\binom{n+r-js-1}{r-1}$$

–

$$|X \setminus \bigcup_{i=1}^{r} A_i| = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n}{s} \right\rfloor} (-1)^j \binom{r}{j}\binom{n+r-js-1}{r-1}$$

– O número de soluções em inteiros não negativos da equação $x_1 + \cdots + x_r = n$ com a restrição adicional $x_i < s$, para todo o $i = 1, \ldots, r$, é

$$\sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n}{s} \right\rfloor} (-1)^j \binom{r}{j}\binom{n+r-js-1}{r-1} = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n}{s} \right\rfloor} (-1)^j \binom{r}{j}\left(\!\!\binom{r}{n-js}\!\!\right).$$

- De quantas maneiras pode escolher n objectos de r tipos podendo repetir no máximo $s-1$ objectos em cada tipo?
- Em particular, quando $s = 1$, temos $x_i = 0$, para todo o i, e o número das soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + \cdots + x_r = n$ satisfazendo $x_i < 1$, para todo o $i = 1, \ldots, r$, é

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{r}{j}\binom{n+r-j-1}{r-1} = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{r}{j}\left(\!\binom{r}{n-j}\!\right) = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n>0 \end{cases}$$

4.4 Permutações de multiconjuntos. Teorema multinomial

4.4.1 Coeficiente multinomial

Definição 4.7. Seja $n = \sum_{i=1}^{k} a_i$, onde $a_1, a_2, \ldots, a_k$ são inteiros não negativos. Definimos

$$\binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_k}$$

como o número de maneiras de partir o conjunto $[n]$ numa lista ordenada de k subconjuntos $A_1,\ A_2, \ldots, A_k$ (partição ordenada) com cardinalidades a_1,a_2, $\ldots, a_k$, respectivamente, onde $n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$.

Este número é chamado coeficiente multinomial.

Nota 4.4. No caso $k = 2$, temos o coeficiente binomial. O número de maneiras de seleccionar um subconjunto com t elementos em $[n]$ é igual ao número de partições ordenadas de $[n]$ em dois blocos de tamanhos t e $n-t$ respectivamente

$$\binom{n}{n-t,\ t} = \binom{n}{t,\ n-t} = \binom{n}{t} = \binom{n}{n-t}$$

Exemplo 4.7. As partições ordenadas de $[4] = \{1,2,3,4\}$, com ambos os blocos de tamanho dois: $(\{1,2\},\ \{3,4\})$,$(\{1,3\},\ \{2,4\})$, $\{1,4\},\{2,3\})$, $(\{2,3\},\ (\{1,4\})$, $(\{2,4\},\ \{1,3\})$, $(\{3,4\},\{1,2\})$

O seu número é igual ao número de subconjuntos de dois elementos que podemos formar em $[4]$: $\binom{4}{2,2} = \binom{4}{2} = 6$.

Proposição 4.9. *Seja* $n = \sum_{i=1}^{k} a_i$, *onde* $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *são inteiros não negativos. Então*

$$\binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_k} = \frac{n!}{a_1! \cdots a_k!}.$$

Demonstração. Vamos determinar o número de maneiras de partir $[n]$ numa lista ordenada de k conjuntos de cardinalidades $a_1, \ldots, a_k$. Podemos começar por escolher a_1 elementos de entre os elemento de $[n]$. Existem $\binom{n}{a_1}$ possibilidades. A seguir escolhemos a_2 elementos dos restantes $n - a_1$ elementos. Existem $\binom{n-a_1}{a_2}$ possibilidades, etc. Pelo princípio do produto generalizado obtém-se

$$\binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_k} =$$

$$= \binom{n}{a_1}\binom{n-a_1}{a_2}\binom{n-a_1-a_2}{a_3}\cdots\binom{n-a_1-a_2-\cdots-a_{k-1}}{a_k} = \frac{n!}{a_1!\cdots a_k!},$$

possibilidades de partir $[n]$ numa lista de k subconjuntos de cardinalidades a_1,a_2, $\ldots, a_k$ respectivamente. □

Simetrias do coeficiente multinomial

Proposição 4.10. *Se $b_1, b_2, \ldots, b_k$ é uma reordenção de $a_1, a_2, \ldots, a_k$, então*

$$\binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_k} = \binom{n}{b_1, b_2, \ldots, b_k}.$$

Demonstração. Prova algébrica. Note-se que $a_1! \cdots a_k! = b_1! \cdots b_k!$ e então $\frac{n!}{a_1!\cdots a_k!} = \frac{n!}{b_1!\cdots b_k!}$.

Prova combinatória. 1) Recorde o exercício 63: $\binom{n}{k}\binom{n-k}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{k}$.

2) Seja $1 \leq i \leq n$. Consideremos o conjunto L de todas as listas ordenadas de k subconjuntos $A_1,\ldots, A_k$ de cardinalidades $a_1, \ldots, a_i, a_{i+1} \ldots, a_k$, respectivamente, e L' o conjunto de todas as listas ordenadas de k subconjuntos $B_1,\ldots, B_k$ de cardinalidades $a_1, \ldots, a_{i+1}, a_i, \ldots, a_k$, tais que $n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ e $[n] = \bigcup_{r=1}^{k} A_r = \bigcup_{r=1}^{k} B_r$. Então

$$|L| = \binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_k} \text{ e } \binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_{i+1}, a_i, \ldots, a_k} = |L'|$$

Defina-se a bijecção $f : L \to L'$, (verifique)

$$(A_1, \ldots, A_i, A_{i+1}, \ldots, A_k) \to (A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, A_i, A_{i+2}, \ldots, A_k)$$

Observe que toda a reordenação pode ser obtida por trocas de posições consecutivas. □

Exemplo 4.8. 1. Quantas funções existem de $\{1, 2, \ldots, 9\}$ para $\{1, 2, 3, 4\}$ tais que as imagens recíprocas de 1, 2, 3 e 4 é dada por 4 conjuntos com cardinalidades 4,2,0,3 respectivamente? E com cardinalidades 4,0,3,2 respectivamente?

$$\binom{9}{4, 0, 3, 2} = \binom{9}{4, 2, 0, 3} = \frac{9!}{4!0!3!2!}$$

4.4.2 Permutações com repetição ou permutações de um multiconjunto

* Dispomos das letras $a, a, a, a, b, b, b, c, c, d$. Vamos calcular o número de palavras de comprimento dez que podemos formar com estas (e apenas estas) letras.
* Seja A o número dessas palavras que podemos formar.
  Consideremos uma dessas A maneiras de formar uma palavra com essas letras e vamos colocar umas etiquetas, digamos de 1 a 4, para as quatro letras a, 1 a 3 para as letras b, 1 a 2 para as letras c, 1 para a letra d.
  Agora temos dez letras diferentes na palavra, e, portanto, temos 10! palavras de comprimento dez onde usamos exactamente as dez letras.
  Quantas destas palavras diferem apenas por causa das etiquetas?
  Às letras a podemos dar etiquetas de 4! maneiras. Nas letras b podem ser colocadas etiquetas em 3! maneiras, nas letras c em 2! maneiras.
  No total as dez letras podem ser etiquetadas em 4!3!2! diferentes maneiras para cada uma das A palavras construídas.
  Portanto $10! = A.4!3!2!$. Ouseja, $A = \frac{10!}{4!3!2!}$

Permutações com repetição e combinações simples

* *Outra maneira de resolver o problema anterior.* Cada uma das palavras de comprimento dez pode ser obtida pela seguinte sequência de procedimentos:
  · Escolher quatro posições para as letras a's de entre as dez. Há $\binom{10}{4}$ possibilidades.
  · Escolher três posições para as letras b's de entre as $10 - 4 = 6$ restantes. Há $\binom{6}{3}$ possibilidades.
  · Escolher duas posições para as letras c's de entre as $10 - 4 - 3 = 3$ restantes. Há $\binom{3}{2}$ possibilidades.
  · Colocar a letra d na única posição que resta. Há $\binom{1}{1}$ possibilidade.
  · Pelo princípio do produto generalizado podemos formar no total $\binom{10}{4}\binom{6}{3}\binom{3}{2}\binom{1}{1}$ palavras de comprimento dez com as letras $a, a, a, a, b, b, b, c, c, d$

$$\frac{10!}{4!3!2!1!} = \binom{10}{4}\binom{6}{3}\binom{3}{2}\binom{1}{1}$$

Permutações de multiconjuntos

Recorde que o coeficiente binomial $\binom{n}{t}$ é igual ao número de palavras de comprimento n no alfabeto $\{x, y\}$ com t letras x e $n - t$ letras y. Generalizamos agora ao caso de um alfabeto com mais de duas letras.

Proposição 4.11. *Sejam n, k e a_1, $a_2, \cdots, a_k$ inteiros não negativos satisfazendo $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n$. Suponhamos que temos a_i objectos do tipo i, para todo o $i = 1, \ldots, k$. Então o número de maneiras de ordenar estes objectos é*

$$\binom{n}{a_1, a_2, \cdots, a_k} = \frac{n!}{a_1!a_2! \cdots a_k!}.$$

O número de palavras de comprimento n que podemos formar com exactamente a_1 letras x_1, a_2 letras x_2, ..., a_k letras x_k .

Demonstração. Codifiquemos os tipos $1, \ldots, k$ pelas letras $x_1, \ldots, x_k$ respectivamente. Cada ordenação dos n objectos tendo a_i objectos do tipo i para $i = 1, \ldots, k$, corresponde a uma palavra de comprimento n no alfabeto $x_1, \ldots x_k$ com a_i letras x_i, para $i = 1, \ldots, k$. □

Nota 4.5.

1. Se $k = 2$ e $a_1 + a_2 = n$, então
$$\frac{n!}{a_1!a_2!} = \frac{n!}{a_1!(n-a_1)!} = \binom{n}{a_1} = \binom{n}{a_2}.$$
2. Para todo o $n \geq k \geq 0$, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
3. Se $k = n$ e $a_1 = \cdots = a_n = 1$, $\binom{n}{a_1, a_2, \cdots, a_n} = \frac{n!}{1!1!\cdots 1!} = n!$

4.4.3 Teorema multinomial.

Teorema 4.12. *Para todos os inteiros positivos n e k, tem-se*

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum_{a_1, a_2, \ldots, a_k} \binom{n}{a_1, a_2, \cdots, a_k} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_k^{a_k},$$

onde a soma é tomada sobre todos os k-uplos de inteiros não negativos $a_1, a_2, \cdots, a_k$ tais que $n = \sum_{i=1}^{k} a_i$, isto é partições fracas de n de comprimento k.

Demonstração. Temos n factores

$$\underbrace{(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)(x_1 + x_2 + \cdots + x_k) \cdots (x_1 + x_2 + \cdots + x_k)}_{n}.$$

Na expansão deste produto, cada um dos n factores contribui com uma letra no alfabeto $\{x_1, \ldots, x_k\}$. A lista formada pela contribuição de cada factor é uma palavra de comprimento n no alfabeto $\{x_1, \ldots, x_k\}$ onde cada x_i aparece $a_i \geq 0$ vezes, precisamente o número de factores que contribuem com x_i, $i = 1, \ldots, k$.

O coeficiente do monómio $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_k^{a_k}$ é o número $\binom{n}{a_1, a_2, \cdots, a_k}$ que é precisamente o número de palavras de comprimento n no alfabeto $\{x_1, \ldots, x_k\}$ em que x_i aparece a_i vezes, $i = 1, \ldots, k$. □

Exercício 4.2. $*$ Quantos monómios distintos $x_1^{a_1}\cdots x_k^{a_k}$, $a_1+\cdots+a_k=n$, aparecem na expansão de $(x_1+x_2+\cdots+x_k)(x_1+x_2+\cdots+x_k)\cdots(x_1+x_2+\cdots+x_k)$?

É igual ao número de composições fracas de n de comprimento k, $\binom{n+k-1}{k-1}=$ número de soluções em inteiros não negativos da equação $y_1+\cdots+y_k=n$

$*$ Quantos termos distintos tem a expansão de $(x_1+x_2+\cdots+x_n)^n$ no teorema multinomial?

$$\binom{2n-1}{n-1}$$

$*$ Quantas palavras de comprimento n existem no alfabeto $\{x_1,\ldots,x_k\}$?

$$k^n$$

ou

$$\sum_{a_1+a_2+\ldots+a_k=n}\binom{n}{a_1,a_2,\cdots,a_k}=k^n$$

A igualdade pode ser provada algebricamente fazendo $x_1=\cdots=x_k=1$ no teorema multinomial.
Uma prova combinatória consiste em notar que para cada composição fraca $a_1+a_2+\ldots+a_k=n$, existem $\binom{n}{a_1,a_2,\cdots,a_k}$ palavras de comprimento n no alfabeto $\{x_1,\ldots,x_k\}$ onde a letra x_i aparece exactamente a_i vezes, para cada $i=1,\ldots,k$. Portanto, no total existem

$$\sum_{a_1+a_2+\ldots+a_k=n}\binom{n}{a_1,a_2,\cdots,a_k}$$

palavras.

Exemplo 4.9. Todas as palavras de comprimento três no alfabeto $\{x,\ y,\ z\}$, $xxx, xxy, xyx, yxx, xxz, xzx, zxx, xyy, yxy, yyx,\ xzz,\ zxz,\ zzx,\ xyz,\ xzy,\ yxz,$ $yzx,\ zyx,\ zxy,\ yyz, yzy,\ zyy,\ yzz, zyz,\ zzy,\ yyy,\ zzz$
O número total é igual 3^3.

$$(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3x^2y+3x^2z+3y^2z+3y^2x+3z^2x+3z^2y$$

$$+6xyz$$

Proposição Numa caixa k dimensional de dimensões $a_1\times\cdots\times a_k$, o número de caminhos mais curtos em $\mathbb{Z}^k$ da origem para o ponto de coordenadas $(a_1,\ldots,a_k)$ é igual a $\binom{n}{a_1,a_2,\cdots,a_k}$.

Prova Sendo a caixa k dimensional os passos unitários são definidos pelos vectores unitários da base canónica de $\mathbb{R}^k$, $e_i = (\underbrace{0,\ldots,0}_{i-1},1,\underbrace{0,\ldots,0}_{n-i})$, $i = 1,\ldots,k$. Associemos a cada direção e_i a letra i. Então existe uma bijecção entre o conjunto das palavras com comprimento $a_1 + \cdots + a_k$, com a_i letras i, para $i = 1,\ldots,k$, e o conjunto dos caminhos mais curtos da origem para o ponto $(a_1,\ldots,a_k)$.

4.4.4 Partições (ordenadas) de conjuntos, funções e coeficientes multinomiais

Voltando à Secção 4.1, podemos agora responder às seguintes perguntas.

* Quantas funções existem de R para N tais que y_i é a imagen de a_i elementos de R, para $i = 1,\ldots,n$?
$$\binom{r}{a_1, a_2, \ldots, a_n} =$$
= número de partições ordenadas do conjunto R em n conjuntos, $A_1,\ldots,A_n$ onde $|A_i| = a_i$, para $i = 1,\ldots,n$ = número total de maneiras de distribuir r bolas distintas por n caixas distintas, colocando a_i bolas na caixa i, para $i = 1,\ldots,n$.
* Qual é o número total de funcões de R par N?
$$\sum_{\substack{(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}\\ a_1+\ldots+a_n=r}} \binom{r}{a_1, a_2, \ldots, a_n} = n^r$$
Número total de partições ordenadas do conjunto R em n conjuntos, podendo haver blocos iguais ao conjunto vazio = Número total de maneiras de distribuir r bolas distintas por n caixas distintas, podendo haver caixas vazias.
* Se $f : R \to N$ for sobrejectiva então os blocos da partição são não vazios, e $(A_1, \ldots, A_n)$ forma uma partição *ordenada* de conjuntos não vazios de R. Quantas funções sobrejectivas existem de R para N ?

  É igual ao número de partições ordenadas de R em n conjuntos não vazios = número de maneiras de colocar r bolas distintas em n caixas distintas sem deixar caixas vazias
$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^r$$

$$= \sum_{\substack{(a_1,\ldots,a_n) \\ \text{composição de } r \\ \text{em } n \text{ partes}}} \binom{r}{a_1, a_2, \ldots, a_n}$$

4.5 Bolas iguais em caixas iguais

4.5.1 Partições de números

· *De quantas maneiras podem ser colocadas r bolas iguais em n caixas iguais podendo deixar caixas vazias? E sem caixas vazias?*

Quando distribuimos bolas iguais por caixas iguais a única coisa que interessa é o número delas por caixa.

Estamos então interessados em determinar o número de maneiras de escrever um inteiro positivo r como soma de inteiros positivos, onde a ordem das parcelas não interessa.

Não distinguimos $4 = 1 + 3$ de $4 = 3 + 1$. Contam uma única maneira de escrever 4 como soma de dois inteiros positivos, neste caso, 3 e 1.

Exemplo 4.10. Partições de $r = 1, 2, 3, 4, 5, 7$:

$r = 1 :$ 1

$r = 2 :$ $2,\ 1 + 1$

$r = 3 :$ $3,\ 2 + 1,\ 1 + 1 + 1$

$r = 4 :$ $4,\ 3 + 1,\ 2 + 2,\ 2 + 1 + 1,\ 1 + 1 + 1 + 1$

$r = 5 :$ $5,\ 4+1,\ 3+2,\ 3+1+1,\ 2+2+1,\ 2+1+1+1,\ 1+1+1+1+1$

$$r = 7 : \quad 7,\ 6 + 1,\ 5 + 2,\ 4 + 3,\ 5 + 1 + 1,\ 4 + 2 + 1,\ 3 + 2 + 2,\ 3 + 3 + 1,$$

$$4 + 1 + 1 + 1,\ 3 + 2 + 1 + 1,\ 2 + 2 + 2 + 1,$$

$$2+2+1+1+1,\ 3+1+1+1+1,\ 2+1+1+1+1+1,\ 1+1+1+1+1+1+1$$

Definição 4.8. Uma partição do número $r > 0$ é uma maneira de escrever r como uma soma de inteiros positivos onde a ordem das parcelas não interessa.

Como a ordem das parcelas não interessa, ao contrário das composições de r, uma partição do número r pode também ser definida do modo que se segue, onde uma certa ordem é preferida:

Definição 4.9. Sejam $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 1$ inteiros positivos tais que $a_1 + \cdots + a_n = r$. A sequência $(a_1, \ldots, a_n)$ é chamada uma partição de de r.

O número de todas as partições de r é denotado por $p(r)$. O número de partições de r em exactamente n partes é denotado por $p(r,n)$.

Exemplo 4.11. $p(1) = 1$, (1)
$p(2) = 2$, (2), $(1,1)$
$p(3) = 3$, (3), $(2,1)$, $(1,1,1)$
$p(4) = 5$, (4) $(3,1)$, $(2,2)$, $(2,1,1)$, $(1,1,1,1)$
$p(5) = 7$, (5) $(4,1)$, $(3,1,1)$, $(3,2)$, $(2,2,1)$, $(2,1,1,1)$, $(1,1,1,1,1)$
$p(7) = 15$
$p(5,1) = 1,\ p(5,2) = 2,\ p(5,3) = 2,\ p(5,4) = 1,\ p(5,5) = 1$

Proposição 4.13. *O número de maneiras de colocar r bolas iguais em n caixas iguais, sem caixas vazias, é $p(r,n)$.*

Demonstração. Distribuir r bolas iguais em n caixas iguais, sem caixas vazias, é o mesmo que escrever r como a soma de n números positivos onde a ordem das parcelas não interessa. □

Como $p(r,i)$ é o número de maneiras de escrever r como a soma de i parcelas positivas, onde a ordem não interessa, o número total de partições de r é

$$p(r) = \sum_{i=1}^{r} p(r,i).$$

Então $\mathbf{p}(r)$ é também o número de maneiras de colocar r bolas iguais em r caixas iguais, podendo deixar caixas vazias.

4.5.2 Relações de recorrência

Proposição 4.14. *O número de maneiras de colocar r bolas iguais em n caixas iguais, podendo deixar caixas vazias, é $p(r+n,n)$. Além disso,*

$$p(r+n,n) = \sum_{i=1}^{n} p(r,i).$$

Demonstração. Pedimos emprestado n bolas iguais e pomos 1 bola em cada caixa. Obtemos n caixas não vazias todas iguais. Em seguida distribuimos as r bolas iguais como nos apetecer. O número de maneiras de colocar $n+r$ bolas iguais pelas n caixas iguais, sem caixas vazias, é $p(r+n,n)$, e é equivalente ao procedimento anterior. Por outro lado, se em cada uma destas distribuições retirarmos uma bola de cada uma das n caixas para devolvermos as n bolas emprestadas, obtemos uma distribuição de r bolas iguais por n caixas iguais podendo haver caixas vazias. □

Proposição 4.15. *Sejam* r *e* n *inteiros positivos. Então* $p(r,n) = 0$ *se* $n > r$, $p(r,r) = p(r,1) = 1$ *e*

$$p(r,n) = \sum_{k=1}^{n} p(r-n,k), \quad r > n > 1.$$

Demonstração. Sabemos que $p(r,n)$ é o número de maneiras de distribuir r bolas iguais por n caixas iguais sem deixar nenhuma vazia. Como $r > n$ e não podem ficar caixas vazias, distribuimos n bolas, uma por cada uma das n caixas, e sobram $r-n$ bolas para serem distribuídas ou por 1 caixa de $p(r-n,1) = 1$ maneiras, ou por 2 caixas não deixando caixas vazias, de $p(r-n,2)$ maneiras, ou por 3 caixas não deixando caixas vazias, de $p(r-n,3)$ maneiras, ..., ou por n caixas sem deixar caixas vazias, de $p(r-n,n)$ maneiras. □

Proposição 4.16. *Sejam* n *e* r *inteiros positivos. Então* $p(r,n) = 0$ *se* $n > r$, $p(r,r) = p(r,1) = 1$ *e*

$$p(r,n) = p(r-1,n-1) + p(r-n,n), \quad \textit{se } r > n > 1.$$

Demonstração. Recordemos que $p(r,n)$ é o número de maneiras de colocar r bolas em n caixas sem caixas vazias. Temos dois casos a considerar.
Existe uma caixa com exactamente uma bola, havendo $r-1$ bolas iguais para serem distribuidas por $n-1$ caixas de tal modo que não fiquem caixas vazias. Temos $p(r-1,n-1)$ maneiras de o fazer.
Não existe nenhuma caixa com exactamente uma bola, ou seja, não havendo caixas vazias, cada caixa tem pelo menos duas bolas, o que significa que $r \geq 2n$. Podemos retirar n bolas e guarda-las à parte, em seguida distribuir as restantes $r-n$ bolas pelas n caixas de modo a não ficar nenhuma vazia, havendo $p(r-n,n)$ maneiras de o fazer, e por fim colocar as n bolas guardadas, uma por cada caixa. □

Exemplo 4.12.

$$p(6,3) = p(5,2) + p(3,3) = 2 + 1$$

Aplicação: Contar formas normais de Jordan

Exercício 4.3. 1. Se uma matriz A, 5×5, tem o valor próprio λ repetido com multiplicidade 5, quantas possibilidades tem para a forma normal de Jordan de A? Quais são os possíveis tamanhos dos blocos?

$$p(5) = 7$$

$$(5);\ (4,1),\ (3,2),\ (3,1,1),\ (2,2,1),\ (2,1,1,1),\ (1,1,1,1,1)$$

2. Se uma matriz A, 5×5, tem os valores próprios α, repetido com multiplicidade 4, e β com multiplicidade 1, quantas possibilidades tem para a forma normal de Jordan de A? Quais são os possíveis tamanhos dos blocos?
$$p(4) = 5$$
$$(4,1),\ (3,1,1),\ (2,2,1),\ (2,1,1,1),\ (1,1,1,1,1)$$
3. O mesmo problema anterior mas agora as multiplicidades de α e β são 3 e 2 respectivamente.
4. Quantas matrizes $n \times n$ na forma normal Jordan existem com valores próprios distintos $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ onde a multiplicidade de λ_i é maior que a multiplicidade de λ_{i+1} para $1 \leq i < k$?

Proposição 4.17. *Sejam r e n inteiros positivos. Então $p(r,n) = 0$ se $n > r$, $p(r,r) = p(r,1) = 1$ e*
$$p(r,n) = \sum_{k=1}^{n} p(r-n,k), \quad r > n > 1.$$

Demonstração. Sabemos que $p(r,n)$ é o número de maneiras de distribuir r bolas iguais por n caixas iguais sem deixar nenhuma vazia. Como $r > n$ e não podem ficar caixas vazias, distribuimos n bolas, uma por cada uma das n caixas, e sobram $r-n$ bolas para serem distribuídas ou por 1 caixa de $p(r-n,1) = 1$ maneiras, ou por 2 caixas não deixando caixas vazias, de $p(r-n,2)$ maneiras, ou por 3 caixas não deixando caixas vazias, de $p(r-n,3)$ maneiras, ..., ou por n caixas sem deixar caixas vazias, de $p(r-n,n)$ maneiras. $\square$

Exemplo 4.13.
$$p(7,4) = p(3,1) + p(3,2) + p(3,3) = 1 + p(1,1) + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$$

Definição 4.10. A expressão $p(r, \leq n)$ denota o número de partições de r com no máximo n partes. Ou seja,
$$p(r, \leq n) = p(r,1) + p(r,2) + \cdots + p(r,n).$$

Em particular, $p(r) = p(r, \leq r)$.

Exemplo 4.14. $p(5) = 7$, (5) $(4,1)$, $(3,1,1)$, $(3,2)$, $(2,2,1)$, $(2,1,1,1)$, $(1,1,1,1,1)$
$p(5) = p(5,5) + p(5,4) + p(5,3) + p(5,2) + p(5,1)$
$p(5,1) = 1,\ p(5,2) = 2,\ p(5,3) = 2,\ p(5,4) = 1,\ p(5,5) = 1$
$p(5, \leq 3) = p(5,1) + p(5,2 + p(5,3) = 1 + 2 + 2 = 5$

Da relação de recorrência anterior, temos

$$p(r, n) = p(r - n, n) + p(r - n, n - 1) + \cdots + p(r - n, 1) = p(r - n, \leq n).$$

Exemplo 4.15. $p(6, 3) = p(6-3, \leq 3) = p(3, \leq 3) = p(3, 3)+p(3, 2)+p(3, 1) = p(3) = 3$
$p(6, 4) = p(6 - 4, \leq 4) = p(2, \leq 4) = p(2, 2) + p(2, 1) = 1 + 1 = 2$
Nota 4.6. Relações de recorrência para $p(r, n)$ o número de partições de r em n partes.
Sejam n e r inteiros positivos. Então $p(r, n) = 0$ se $n > r$, $p(r, r) = p(r, 1) = 1$ e

$$p(r, n) = p(r - 1, n - 1) + p(r - n, n), \quad \text{se } r > n > 1.$$

Na aula anterior usámos um argumento combinatório para provar esta relação de recorrência. Vamos ver agora que ela também pode ser obtida da relação de recorrência anterior.
Prova 2 Usando a relação de recorrência anterior:

$$p(r, n) = p(r-n, n)+p(r-n, n-1)+\cdots+p(r-n, 1) = p(r-n, n)+p(r-n, \leq n-1).$$

Por outro lado,

$$p(r - 1, n - 1) = p(r - 1 - (n - 1), \leq n - 1) = p(r - n, \leq n - 1).$$

Portanto,

$$p(r, n) = p(r - 1, n - 1) + p(r - n, n).$$

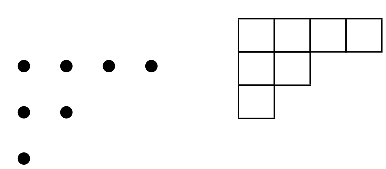
Exemplo 4.16.

$$\begin{aligned} p(6, 3) &= p(5, 2) + p(3, 3) \\ &= p(4, 1) + p(3, 2) + p(3, 3) = p(4, 1) + p(2, 1) + p(1, 2) + p(3, 3) \\ &= 1 + 1 + 1 = 3 \end{aligned}$$

4.5.3 Diagramas de Ferrers ou Young

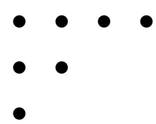
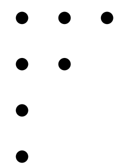
O diagrama de Ferrers (diagrama de Young) de uma partição $p = (a_1, \ldots, a_k)$ de n é um conjunto de n pontos (ou caixas quadradas) alinhadas à esquerda, de tal modo que a linha 1, contando de cima para baixo, tem a_1 pontos (caixas), a linha 2 tem a_2 pontos (caixas), ..., a linha k tem a_k pontos (caixas).

$p = (4, 2, 1)$



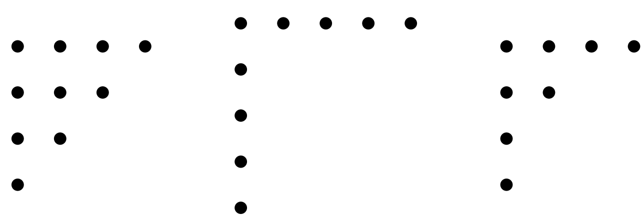
4.5.4 Diagrama de Young e partição conjugada

Se reflectirmos o diagrama de Ferrers de uma partição p, com respeito à sua diagonal principal $y = -x$, obtemos a partição p' conjugada da partição p. O comprimento da coluna i do diagrama de Ferrers de p é igual ao comprimento da linha i do diagrama de Ferrers da conjugada de p. As partições $p = (4, 2, 1)$ e $p' = (3, 2, 1, 1)$ são conjugadas uma da outra. Se reflectirmos o diagrama de Ferrers de p' obtemos p, isto é, $(p')' = p$.

$p = (4, 2, 1)$   $p' = (3, 2, 1, 1)$

Uma partição é dita auto-conjugada se é igual à sua conjugada. (O diagrama de Ferrers coincide com o que se obtém da reflexão segundo a diagonal principal.)

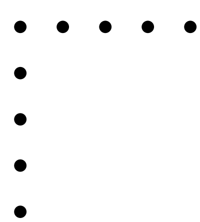
$$(4, 3, 2, 1),\ (5, 1, 1, 1, 1),\ (4, 2, 1, 1) \quad \text{são auto-conjugadas}$$



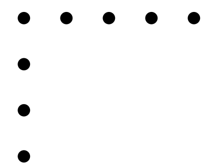
$$p = p'$$

Gancho. Dada um diagrama de Young, toda a caixa nesse diagrama determina um (único) gancho que consiste dessa caixa e das caixas à sua direita, na mesma linha (braço), e das caixas situadas abaixo, na mesma coluna (perna).

A partição $(5, 1, 1, 1, 1)$ é ela própria um gancho onde a perna e o braço têm o mesmo comprimento 4.



A partição $(5, 1, 1, 1)$ é também um gancho mas neste caso a perna tem comprimento 3 enquanto o braço tem comprimento 4.

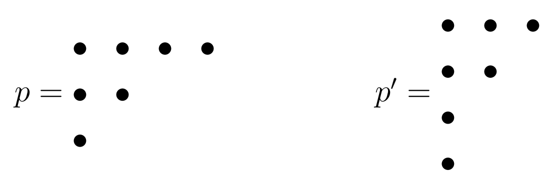


Proposição 4.18. *O número de partições de r com k partes é igual ao número de partições de r com a parte maior igual a k.*
O número de partições de r com no máximo k partes é igual ao número de partições de r em partes de tamanho menor ou igual a k.

$$p(r, k) = \#\textit{partições de } r \textit{ com a parte maior igual a } k.$$

$$p(r, \leq k) = \#\textit{partições de } r \textit{ em partes de tamanho} \leq k.$$

Exemplo 4.17. $(4, 2, 1)$ é uma partição de 7 com 3 partes, e a sua conjugada $(3, 2, 1, 1)$ é uma partição de 7 com a parte maior igual a 3.



Conjugando uma partição com parte maior igual a 3 obtemos uma partição com três partes.

Demonstração. Vamos provar que existe uma bijecção entre o conjunto das partições de r, com no máximo k partes, e o conjunto das partições com partes $\leq k$
Se o número de partes da partição $p = (a_1, \ldots, a_m)$ é $m \leq k$, então a parte maior da partição conjugada p' é $m \leq k$. Portanto, as restantes partes de p' são $\leq k$.
Seja P_r o conjunto das partições de r. A função

$$f : P_r \to P_r, \quad f(p) = p',$$

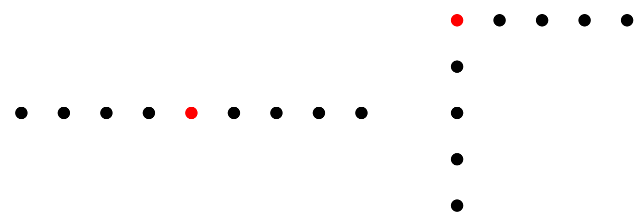
é uma bijecção. Note que $(p')' = p$ e $f \circ f = id$.
Em particular, f transforma o conjunto das partições de r com k partes no conjunto das partições de r com a parte maior igual a k; e o conjunto das partições de r com no máximo k partes, no conjunto das partições com partes $\leq k$. $\square$

4.5.5 Partições auto-conjugadas

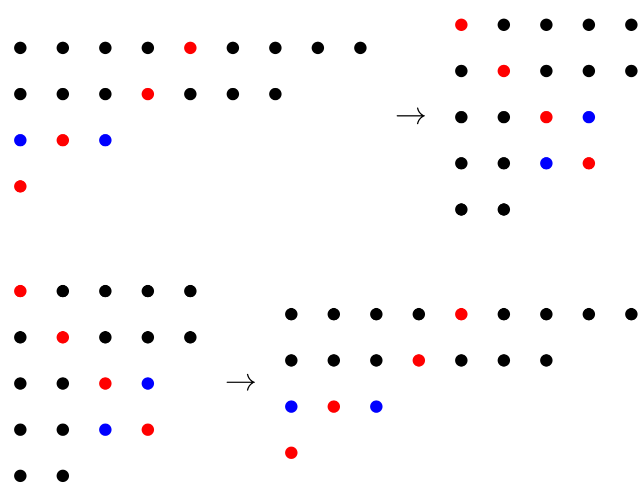
Proposição 4.19. *O número de partições auto-conjugadas de n é igual ao número de partições de n em partes ímpares distintas.*

Demonstração. Consideremos uma partição de n em partes distintas ímpares. Observe-se que toda a parte ímpar $2q+1$ de uma partição de n pode ser dobrada no meio (pontos a vermelho) de modo a formar um gancho onde o braço e a perna têm o mesmo comprimento q.

$2 \times 4 + 1$



Como duas partes consecutivas são dois ímpares distintos, se a maior é $2q+1$, a outra é quando muito $2q-1 = 2(q-1)+1$. Então o comprimento dos braços (pernas) dos respectivos ganchos é q e $q-1$ (quando muito), isto é, decresce estritamente.
Iniciando este processo com a primeira linha da partição, e encaixando sucessivamente os ganchos, obtemos uma partição autoconjugada:



Para verificarmos que temos uma bijecção basta mostrar que este procedimento pode ser invertido. Começando com uma partição auto conjugada observemos que o diagrama de Ferrers é simétrico relativamente ao eixo $y = -x$. Isto é toda a caixa ao longo deste eixo determina um gancho com braço e perna de igual tamanho. Rectificando todos os ganchos com o cotovelo no eixo $y = -x$, obtemos uma partição com todas as partes distintas e de comprimento ímpar. $\square$

4.5.6 Função geradora de todas as partições com partes $\leq k$

Consideremos o produto das k séries formais

$$(1+x^1+x^{1+1}+x^{1+1+1}+\cdots)(1+x^2+x^{2+2}+x^{2+2+2}+\cdots)\cdots(1+x^k+x^{k+k}+x^{k+k+k}+\cdots)$$

O número de maneiras de obter x^r é igual ao número de maneiras de escrever $r=(1+\cdots+1)+(2+\cdots+2)+\cdots+(k+\cdots+k)$, ou seja, de escrever r como uma soma de partes todas $\leq k$. O coeficiente de x^r é igual a $p(r,\leq k)$. Então

$$\begin{aligned} & (1+x^1+x^{1+1}+x^{1+1+1}+\cdots)(1+x^2+x^{2+2}+\cdots)\cdots(1+x^k+x^{k+k}+\cdots) = \\ = \ & \sum_{r\geq 0} p(r,\leq k)x^r. \end{aligned}$$

Convencionamos $p(0):=1$.

Exemplo 4.18. Para $k=2$,

$$\begin{aligned} & (1+x^1+x^{1+1}+x^{1+1+1}+\cdots)(1+x^2+x^{2+2}+x^{2+2+2}+\cdots) \\ = \ & 1+p(1,\leq 2)x+p(2,\leq 2)x^2+p(3,\leq 2)x^3+p(4,\leq 2)x^4+p(5,\leq 2)x^5+\cdots \end{aligned}$$

Escrevemos todas as partições de 5 apenas com partes 1 e 2

x^1x^{2+2}, $x^{1+1+1}x^2$, $x^{1+1+1+1+1}$

Donde, $p(5,\leq 2)=3$.

CAPÍTULO 5

ASPECTOS ENUMERATIVOS DO GRUPO SIMÉTRICO

5.1 Permutações de um conjunto finito

Definição *Seja X um conjunto finito. Uma permutação de X é uma ordenação qualquer dos elementos de X, isto é, uma palavra no alfabeto X usando toda as letras uma única vez. Equivalentemente, é uma bijecção $X \to X$.*

Usualmente consideramos $X = \{1, \ldots, n\}$. As permutações podem ser entendidas como ordenações lineares de objectos distintos, usualmente elementos de $\{1, \ldots, n\}$, ou como bijecções de $\{1, \ldots, n\}$ para $\{1, \ldots, n\}$.
A permutação $a_1 a_2 \cdots a_n$, escrita na forma de uma palavra, dos elementos do conjunto $\{1, \ldots, n\}$, pode ser vista como sendo a única função (bijectiva) $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ tal que $\sigma(i) = a_i$, $i = 1, \ldots, n$,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}.$$

Por outro lado, toda a permutação σ, entendida como função bijectiva $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$, pode ser representada pela palavra $\sigma = \sigma(1)\sigma(2) \cdots \sigma(n)$
Exemplo 5.1. Para $n = 6$,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} = 234165$$

5.2 Grupo simétrico de ordem n

O produto de permutações, entendido como composição de funções, é novamente uma permutação

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\sigma\tau(i) := \sigma(\tau(i))$$

O produto de permutações não é uma operação comutativa. Em geral, $\tau\sigma \neq \sigma\tau$.

(Recorde a definição de matriz de permutação e note que o produto de permutações corresponde ao produto das respectivas matrizes de permutação. Como sabe o produto de matrizes não é uma operação comutativa.)

· A permutação identidade $id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$.

· Toda a permutação $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ tem uma inversa (única) σ^{-1}, com respeito à operação composição, isto é, $\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = id$,

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

· A composição é uma operação asociativa $(\sigma\tau)\xi = \sigma(\tau\xi)$.

· O conjunto de todas as permutações de $\{1, 2, \ldots, n\}$ com a composição de funções tem estrutura de grupo e é chamado o *grupo simétrico de ordem n*, denotado usualmente por $\mathfrak{S}_n$. $\mathfrak{S}_n$ é um grupo não comutativo par $n \geq 3$. O número de elementos deste grupo é $n!$.

5.3 Ciclos e decomposição cíclica

Definição 5.1. Uma permutação cíclica, ou simplesmente ciclo, de comprimento k, é uma permutação da forma

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{k-1} & a_k \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_k & a_1 \end{pmatrix}$$

que denotaremos por $(a_1\, a_2\, \cdots\, a_k)$. Um ciclo de comprimento 1, (a_1), é dito um ponto fixo. Um ciclo de comprimento dois é chamado uma transposição $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}$.

O ciclo acima $\pi = (a_1\, a_2\, \cdots\, a_k)$ pode ser visualizado por

$$\begin{array}{c} -\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,- \\ \downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad | \\ a_1 \to a_2 \to \cdots \to a_{k-1} \to a_k \end{array}$$

$$\pi(a_1) = a_2 \quad \pi(a_2) = a_3 \quad \ldots \quad \pi(a_k) = a_1$$

Note que, $\pi^k(a_i) = a_i$, $i = 1, \ldots, k$, e se $k|m$ então $\pi^m(a_i) = a_i$, $i = 1, \ldots, k$.

Exemplo

- Ciclo de comprimento 4

$$\pi = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 & 8 \\ 4 & 7 & 8 & 2 \end{pmatrix} = (2\,4\,7\,8)$$

  Note que $\pi(2) = 4$, $\pi^2(2) = 7$, $\pi^3(2) = 8$, $\pi^4(2) = 2$, quatro é o menor inteiro positivo m tal que $\pi^m(2) = 2$. Qual é o menor inteiro positivo m tal que $\pi^m(4) = 4$?

-

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\sigma(1) = 3, \quad \sigma^2(1) = 1 \qquad \sigma(2) = 2$$

$$\sigma(4) = 5, \quad \sigma^2(4) = 6, \quad \sigma^3(4) = 4$$

  σ permuta os elementos $1, 3$ entre eles, fixa 2, e permuta os elementos $4, 5, 6$ entre eles.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 3) = (1\ \sigma(1))$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} = (4 \;\; \sigma(4) \;\; \sigma^2(4)) = (4\;5\;6)$$

Proposição 5.1. *Se $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ é uma permutação e $x \in \{1, 2, \ldots, n\}$, então existe um inteiro positivo $1 \leq i \leq n$ tal que $\sigma^i(x) = x$.*

Demonstração. Consideremos $x, \sigma(x), \sigma^2(x), \ldots, \sigma^n(x)$. Pelo princípio do pombal, se temos $n+1$ bolas e n caixas, então, ou $\sigma^i(x) = x$, para algum $1 \leq i \leq n$, ou $\sigma^j(x) = \sigma^k(x)$, com $1 \leq j < k \leq n$.
No último caso, aplicando σ^{-1} a ambos lados desta igualdade, j vezes, temos

$$x = (\sigma^{-1})^j \sigma^j(x) = (\sigma^{-1})^j \sigma^j \sigma^{k-j}(x) = \sigma^{k-j}(x).$$

Ou seja, $\sigma^{k-j}(x) = x$, com $1 \leq k - j < n$. □

Seja $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ uma permutação e $x \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Seja i o menor inteiro positivo tal que $\sigma^i(x) = x$ e consideremos o conjunto $S = \{x, \sigma(x), \ldots, \sigma^{i-1}(x)\}$. Note que $\sigma^r(x) \neq \sigma^s(x)$, $1 \leq r < s \leq i - 1$. Caso contrário, $\sigma^{s-r}(x) = x$ com $1 \leq s - r < i$. Então

$$(x\,\sigma(x)\,\sigma^2(x)\;\ldots\;\sigma^{i-1}(x))$$

é uma permutação cíclica do conjunto S.
Vamos provar que este ciclo é o único ciclo de σ que contém x.

Exemplo 5.2. $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} = (4 \;\; \sigma(4) \;\; \sigma^2(4)) = (4\;5\;6)$ é o único ciclo de

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

que contém 4.

Proposição 5.2. *Dado $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, todo o elemento de $\{1, 2, \ldots, n\}$ é membro de um único ciclo de σ.*

Demonstração. Seja $x \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e i o menor inteiro positivo tal que $\sigma^i(x) = x$. Então

$$(x,\; \sigma(x)\,\sigma^2(x)\;\ldots\;\sigma^{i-1}(x))$$

é um ciclo de σ, com comprmento i, contendo x.
Da definição de ciclo concluímos que σ permuta os elementos de $S = \{x, \sigma(x), \sigma^2(x), \ldots, \sigma^{i-1}(x$
entre si.

Se $y = \sigma(x)$, então i é o menor inteiro positivo tal que $\sigma^i(y) = y$, e $(y\,\sigma(y)\,\ldots\,\sigma^{i-1}(y))$ é um ciclo de comprimento i,

$$(y\,\sigma(y)\,\ldots\,\sigma^{i-1}(y)) = (\sigma(x)\,\sigma^2(x)\ldots\sigma^{i-1}(x)\,\sigma^i(x) = x)$$

$$= (x\,\sigma(x)\,\ldots\sigma^{i-1}(x))$$

que é precisamente o ciclo de comprimento i acima.
Em geral, se $y = \sigma^j(x)$, $1 \leq j \leq i-1$, i é o menor inteiro positivo tal que $\sigma^i(y) = y$,

$$(y\,\sigma(y)\,\ldots\,\sigma^{i-1}(y)) =$$

$$= (\sigma^j(x)\,\sigma^{j+1}(x)\,\ldots\,\sigma^{j+i-j}(x) = x\ \sigma(x)\,\ldots\,\sigma^{j+i-1}(x) = \sigma^{j-1}(x))$$

$$= (x\,\sigma(x)\,\sigma^2(x)\,\ldots\,\sigma^{i-1}(x))$$

é o ciclo de comprimento i acima. Portanto, cada elemento da permutação σ pertence a um e um só ciclo de σ. □

Se σ_1 e σ_2 são ciclos distintos de σ então são permutações cíclicas de subconjuntos disjuntos de $\{1,\ldots,n\}$ e dizemos que σ_1 e σ_2 são ciclos disjuntos. Os ciclos de σ definem então uma partição de $\{1,\ldots,n\}$.

Exemplo 5.3. Os ciclos de 321564 são (3 1), (2) e (5 6 4). Ou seja $\{1,3\}$, $\{2\}$, e $\{4,5,6\}$ definem uma partição de $\{1,2,3,4,5,6\}$.

Ciclos distintos σ_1 e σ_2 de σ são permutações cíclicas de subconjuntos disjuntos S_1 e S_2 de $\{1,\ldots,n\}$. Então, pondo $\sigma_1(x) = x$ para $x \in \{1,\ldots,n\} \setminus S_1$, e $\sigma_2(x) = x$ para $x \in \{1,\ldots,n\} \setminus S_2$, concluímos que σ_1 e σ_2 comutam,

$$\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1.$$

Podemos então escrever

Corolário 5.3. *Dado $n \geq 1$, toda a permutação $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ pode ser decomposta de modo único, a menos da ordem, em ciclos dois a dois disjuntos, $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$, isto é,*
- cada ciclo σ_i tem comprimento ≥ 1,
- quaisquer dois ciclos σ_i, σ_j não têm elementos em comum,
- $\sigma = \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k$.

Exemplo 5.4. Decomposição cíclica de 321564 = (31)(2)(564).

5.3.1 Forma canónica da decomposição cíclica

- Um ciclo pode ser escrito de várias maneiras:
  $(31) = (13)$, $\sigma(3) = 1$, $\sigma(1) = 3$,
  $(564) = (645) = (456)$ $\sigma(5) = 6$ $\sigma(6) = 4$ $\sigma(4) = 5$;
  e o produto de dois ciclos disjuntos comuta. $(564)(31) = (31)(564)$
- O ciclo $(a_1\, a_2, \ldots, a_k)$ pode ser escrito de k maneiras distintas.

Teorema 5.4. Forma canónica da decomposição cíclica*: cada ciclo é escrito com o seu maior elemento em primeiro lugar e os ciclos são escritos por ordem crescente dos seus primeiros elementos.*

Exemplo 5.5.

$$2135647 = (21)(3)(645)(7)$$

$$2451376 = (412)(53)(76)$$

5.4 Tipo de uma permutação

- Uma permutação σ de $\mathfrak{S}_n$ diz-se do tipo $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, onde $1.a_1 + 2.a_2 + 3.a_3 + \cdots + n.a_n = n$, se tem a_i ciclos de comprimento i, para $i = 1, \ldots, n$.
- Para $n = 9$
  $\sigma = (35146)(879)(2)$ é do tipo $(1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$,
  $\sigma = (351468)(7)(9)(2)$ é do tipo $(3, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$,
  $\sigma = (351468792)$ é do tipo $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$,
  $id = (3)(5)(1)(4)(6)(8)(7)(9)(2)$ é do tipo $(9, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$.
- Quando a permutação de $\mathfrak{S}_n$ é constituída apenas por ciclos de comprimento 1 é do tipo $(n, 0, \ldots, 0)$ e temos a permutação identidade.
- Uma permutação de $\mathfrak{S}_n$ é do tipo $(0, \ldots, 0, 1)$ se e só se é um ciclo de comprimento n.

• Quantos ciclos distintos de comprimento 4 podemos formar em $\{1, 2, 3, 4\}$? E quantos ciclos distintos de comprimento n podemos formar em $\{1, 2, \ldots, n\}$? Todo o ciclo, na notação ciclíca, pode ser escrito com o seu maior elemento em primeiro lugar. Basta escrever todos os ciclos de comprimento 4, no conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$, pondo o 4 em primeiro lugar: $(4\, a\, b\, c)$ onde abc percorre todas as permutações de $\{1, 2, 3\}$. No total temos 3! ciclos de comprimento 4 no conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$.,

$$(4\,1\,2\,3) \quad (4\,2\,1\,3) \quad (4\,1\,3\,2) \quad (4\,2\,3\,1) \quad (4\,3\,2\,1) \quad (4\,3\,1\,2).$$

Esta pergunta é o mesmo que perguntar de quantas maneiras podemos sentar n pessoas à volta de uma mesa circular, assumindo que as cadeiras estão igualmente espaçadas à volta desta e que não distiguimos uma mesa que se obtenha desta por uma rotação qualquer das pessoas à volta da mesma.
Senta-se em primeiro lugar a pessoa designada por n, e as restantes $n-1$ pessoas podem ser sentadas de $(n-1)!$ maneiras nos restantes $n-1$ lugares. Os ciclos distintos são $(n\, a_1 \cdots a_{n-1})$ onde $a_1 \cdots a_{n-1}$ é uma permutação qualquer de $\{1, \dots, n-1\}$.

5.5 Fórmula para o número de permutações de um dado tipo

Quantas permutações de n elementos do tipo $(0, 0, \dots, 0, 1)$, isto é, que constituem um ciclo de comprimento n, existem?

$$(n-1)!$$

Teorema 5.5. *O número de permutações de n elementos do tipo $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, isto é, com a_1 ciclos de comprimento 1, a_2 ciclos de comprimento 2, $\dots$, a_n ciclos de comprimento n, é*

$$\frac{n!}{a_1!1^{a_1}a_2!2^{a_2}\dots a_n!n^{a_n}}.$$

Demonstração. Vamos contar permutações de um tipo dado.

· Escrevamos os números de 1 até n numa linha por uma ordem qualquer, em seguida, indo da esquerda para a direita inserimos pares de parenteses de acordo com o tamanho requerido dos ciclos: primeiro a_1 pares de parenteses para criar a_1 ciclos de comprimento 1; depois a_2 pares de parenteses para criar a_2 ciclos de comprimento 2, etc. Deste modo obtemos uma permutação do tipo requerido em que os comprimentos dos ciclos são crescentes da esquerda para a direita.
  Existem $n!$ maneiras de fazer isto – o número de maneiras de escrever os números de 1 até n numa linha, e existe uma só maneira de inserir os parenteses de modo a obter a sucessão de comprimentos descrita.
  Contudo existem diversas maneiras de escrever os n inteiros que conduzem à mesma permutação depois de inseridos os partenteses.
  Quantas?

- Contudo existem diversas maneiras de escrever os n inteiros que conduzem a mesma permutação depois de inseridos os parenteses.
  Quantas?
  Os elementos de um mesmo ciclo de comprimento i podem ser ordenados de i diferentes maneiras e ainda conduzem ao mesmo ciclo. Portanto, toda a permutação pode ser obtida de pelo menos
  $$\prod_{i=1}^{n} i^{a_i}$$
  maneiras (existem a_i ciclos de comprimento i).
- Além disso, se existem duas maneiras de escrever os n inteiros que resultam em permutações que têm exactamente os mesmos ciclos de comprimento i, apenas por ordem diferente, então novamente elas conduzem à mesma permutação. Os a_i ciclos podem ser permutados de $a_i!$ diferentes maneiras, e a permutação dos ciclos pode ser feita independentemente da ordem dos elementos dentro de cada ciclo.
  Acabámos de mostrar que cada permutação pode ser obtida de
  $$\prod_{i=1}^{n} i^{a_i} a_i! = a_1! 1^{a_1} a_2! 2^{a_2} \dots a_n! n^{a_n}.$$
  maneiras.
  O número de permutações do tipo $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ é então
  $$\frac{n!}{a_1! 1^{a_1} a_2! 2^{a_2} \dots a_n! n^{a_n}}.$$

□

5.6 Relação de recorrência e número de Stirling de primeira espécie

Definição 5.2. o símbolo $c_{n,k}$ denota o número de permutações de n elementos com precisamente k ciclos na sua decomposição cíclica.

Alguns valores: $c_{n,k} = 0$, $k > n$, $c(n, 0) = 0$, $c(n, n) = 1$, $c(n, 1) = (n-1)!$, $c_{n,n-1} = \binom{n}{2}$. Classificando as permutações de acordo com seu número de ciclos, como o número de ciclos de uma permutação de n elementos varia entre 1 e n, obtemos

$$\sum_{k=0}^{n} c_{n,k} = n!. \tag{5.1}$$

e

$$c_{n,k} = c_{n-1,k-1} + (n-1)c_{n-1,k}, \quad n > 1. \tag{5.2}$$

O lado esquerdo da igualdade (5.2) conta o número de permutações de n elementos com k ciclos. Vamos ver que o lado direito também. Consideremos uma dessas permutações com k ciclos. Então nessa permutação ou n forma um ciclo por si próprio ou não.
No primeiro caso, os restantes $n-1$ elementos formam $k-1$ ciclos e $c_{n-1,k-1}$ conta precisamente essas permutações.
No segundo caso, n pertence a um ciclo de comprimento pelo menos dois e, portanto, os restantes $n-1$ elementos formam k ciclos onde se acrescenta n de alguma maneira. Esses k ciclos podem ser formados de $c_{n-1,k}$ maneiras. Em cada um dessas maneiras, o elemento n pode ser acrescentado à frente de cada um dos $n-1$ elementos que constituem esses k ciclos. Isto multiplica o número de possibilidades por $n-1$ o que explica a segunda parcela do lado direito da igualdade.

Proposição 5.6. *Seja $n \geq 1$,*

$$x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1) = \sum_{k=0}^{n} c_{n,k}x^k.$$

Demonstração. Por indução sobre n.
Para $n=1$, $x = c_{1,0} + c_{1,1}x^1$, $c_{1,1} = 1$, $c_{1,0} = 0$.
Seja $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-2)(x+n-1) &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} c_{n-1,k}x^k\right)(x+n-1) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} c_{n-1,k}x^{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1}(n-1)c_{n-1,k}x^k \\ &= \sum_{k=1}^{n} c_{n-1,k-1}x^k + \sum_{k=0}^{n}(n-1)c_{n-1,k}x^k, \quad c_{n-1,n} = 0 \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left[c_{n-1,k-1} + (n-1)c_{n-1,k}\right] x^k + (n-1)c_{n-1,0}x^0, \quad c_{n-1,0} = c_{n,0} = 0 \\ &= \sum_{k=0}^{n} c_{n,k}x^k. \end{aligned}$$

Considere

$$x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1) = \sum_{k=0}^{n} c_{n,k}x^k.$$

Substitua x por $-x$ na igualdade acima e multiplique ambos os membros por $(-1)^n$, obtém-se

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}c_{n,k}x^k = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1).$$

Note que $(-1)^n = (-1)^{n-k}(-1)^{2k} = (-1)^{n-k}$. □

Definição 5.3. Seja $s_{n,k} := (-1)^{n-k}c_{n,k}$. Este número é chamado Stirling de primeira espécie. A $c_{n,k}$ também se chama o número de Stirling de primeira espécie sem sinal.

5.7 Números de Stirling de primeira e segunda espécie

Qual a relação entre os números de Stirling de primeira e segunda espécie?
Seja $n \geq 0$.

$$\sum_{k=0}^{n} s_{n,k}x^k = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1),$$

onde $s_{n,k} = (-1)^{n-k}c_{n,k}$ é o número de Stirling de primeira espécie.
Já provámos que

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k}x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1),$$

onde $S_{n,k}$ = # partições do conjunto $[n]$ em k blocos (não vazios), não interessando a ordem; número de Stirling de segunda espécie.
Consideremos o espaço vectorial V complexo dos polinómios de grau $\leq n$

$$V = \{a_kx^k + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 : 0 \leq k \leq n, a_i \in \mathbb{C}\},$$

convencionamos grau do polinómio nulo igual a $-\infty$. Os conjuntos $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ e $\{1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2), \ldots, x(x-1)\cdots(x-n+1)\}$ constituem duas bases para V. As igualdades

$$x^j = \sum_{k=0}^{j} S_{j,k}x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1), \quad 0 \leq j \leq n$$

e

$$x(x-1)(x-2)\cdots(x-j+1) = \sum_{k=0}^{j} s_{j,k}x^k, \quad 0 \leq j \leq n$$

dizem que as matrizes de mudança de base são respectivamente $M = [m_{ij}] = [S_{j,i}]_{i,j\geq 0}$ e $N = [n_{ij}]_{i,j\geq 0} = [s_{j,i}]$, ambas matrizes, $n \times n$, triangulares superiores com 1's na diagonal (portanto, invertíveis). Note que $S_{j,i} = s_{j,i} = 0$ para $j < i$, e $S_{j,j} = s_{j,j} = 1$.

Exemplo 5.6. $n = 4$, $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ e $\{1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2), x(x-1)(x-2)(x-3)\}$

$$M = \begin{pmatrix} S_{0,0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_{1,1} & S_{2,1} & S_{3,1} & S_{4,1} \\ 0 & 0 & S_{2,2} & S_{3,2} & S_{4,2} \\ 0 & 0 & 0 & S_{3,3} & S_{4,3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{4,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x^4 = S_{4,0}.1 + S_{4,1}x + S_{4,2}x(x-1) + S_{4,3}x(x-1)(x-2) + x(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$x(x-1)(x-2)(x-3) = s_{4,0}1 + s_{4,1}x + s_{4,2}x^2 + s_{4,3}x^3 + x^4$$

$$S_{0,0} = s_{0,0} = 1, \quad S_{j,0} = s_{j,0} = 0, j > 0, \quad S_{j,1} = 1, \quad S_{4,2} = 2^3 - 1, \quad S_{4,3} = \binom{4}{2}$$

$$s_{4,1} = (-1)^3 c_{4,1} = -3! = -6, \quad s_{4,2} = (-1)^2 c_{4,2} = 11, \quad s_{4,3} = (-1)c_{4,3} = -\binom{4}{2} = -6$$

Verifique que $MN = NM = I_4$.

5.8 Aplicação: Permutações conjugadas

Definição 5.4. Duas permutações σ e θ de $\mathfrak{S}_n$ são ditas *conjugadas* se existe $\xi \in \mathfrak{S}_n$ tal que $\xi\sigma\xi^{-1} = \theta$.

Prova-se que duas permutações são conjugadas se e só se as suas decomposições cíclicas têm o mesmo tipo.

A relação "σ e θ são conjugadas"define uma relação de equivalência em $\mathfrak{S}_n$. As classes de equivalência são chamadas classes de conjugação.

• *Quantos elementos tem uma classe de conjugação de $\mathfrak{S}_n$?*

Se a classe for consituída pelas permutações do tipo $(a_1, \ldots, a_n)$, o número de elementos da classe é

$$\frac{n}{a_1!1^{a_1}a_2!2^{a_2}\cdots a_n!n^{a_n}}$$

• *Quantas classes de conjugação existem em $\mathfrak{S}_n$?*
• *Quantos tipos de permutações de n elementos existem?*

É igual ao número de soluções em inteiros não negativos da equação

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n = n$$

que é $p(n)$.

5.9 Inversões de uma permutação de $\mathfrak{S}_n$

Definição 5.5. Uma inversão da permutação $\pi \in \mathfrak{S}_n$ é um par (i, j) com $i < j$ e $\pi(i) > \pi(j)$.

Definição 5.6. O conjunto das inversões da permutação $\pi = a_1a_2\cdots a_n$ é o conjunto $\{(i, j) : i < j$ mas $a_i > a_j\}$, e $inv(\pi)$ é o número de inversões de π.

Exemplo 5.7. A permutação $\pi = 4271365$ tem o conjunto de inversões

$$\{(1, 2); (1, 4); (1, 5); (2, 4); (3, 4); (3; 5); (3, 6); (3, 7); (6, 7)\}$$

e $inv(\pi) = 9$.

Exercício 5.1. Mostre que

$$inv(\pi) = inv(\pi^{-1}); \quad 0 \leq inv(\pi) \leq \binom{n}{2} = n - 1 + \cdots + 2 + 1;$$

$$max_{\mathfrak{S}_n}(inv\pi) = n - 1 + \cdots + 2 + 1 = \binom{n}{2}$$

5.9.1 Função geradora do número de permutações de $\mathfrak{S}_n$ com respeito ao número de inversões

Para $n = 2, 3$, temos

$$\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_2} q^{\mathrm{inv}(\pi)} = q^{inv(12)} + q^{inv(21)} = q^0 + q^1 = 1 + q$$

e

$$\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_3} q^{\mathrm{inv}(\pi)} = q^{inv(123)} + q^{inv(132)} + q^{inv(213)} + q^{inv(231)} + q^{inv(312)} + q^{inv(321)}$$

$$= q^0 + 2q + 2q^2 + q^3 = (1+q)(1+q+q^2)$$

Em $\mathfrak{S}_3$ existem 1 permutação com 0 inversões, 2 permutações com 1 inversão, 2 permutação com 2 inversões, 1 permutação com 3 inversões (número máximo de inversões de uma permutação em $\mathfrak{S}_3$).

Função geradora do número de permutações de $\mathfrak{S}_n$ com respeito ao número de inversões

$$\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} q^{\mathrm{inv}(\pi)} = (1+q)(1+q+q^2)\cdots(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}).$$

Demonstração por indução sobre n que omitimos.
O grau deste polinómio é $\binom{n}{2}$. O coeficiente de $q^{\binom{n}{2}}$ é 1, ou seja, existe apenas uma permutação em $\mathfrak{S}_n$ com $\binom{n}{2}$ inversões.

5.10 Sinal de uma permutação de $\mathfrak{S}_n$

Definição 5.7. Definimos sinal de uma permutação π como sendo $(-1)^{inv\pi}$ e escrevemos $sgn\,\pi = (-1)^{inv\pi}$. Uma permutação diz-se par se $sgn\,\pi = 1$ e ímpar se $sgn\,\pi = -1$.

Fazendo $q = -1$ em

$$\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} q^{\mathrm{inv}(\pi)} = (1+q)(1+q+q^2)\cdots(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}),$$

obtemos

$$\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} (-1)^{\mathrm{inv}(\pi)} = 0$$

$$\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} sgn\,\pi = 0$$

$|\{\pi \in \mathfrak{S}_n : sgn(\pi) = 1\}| = n!/2 = |\{\pi \in \mathfrak{S}_n : sgn(\pi) = -1\}|$.

5.10.1 Sinal de uma permutação e decomposição cíclica

Definição 5.8. Um ciclo de comprimento par (ímpar) é uma permutação ímpar (par). Uma permutação é par se e só se o número de ciclos de comprimento par é par. Uma permutação em $\mathfrak{S}_n$ cuja decomposição cíclica tem r ciclos tem sinal igual a $(-1)^{n-r}$.

Se $(a_1 a_2 \dots a_m)$ é um ciclo de comprimento m, então

$$sgn\,(a_1 a_2 \dots a_m) = (-1)^{m-1}.$$

Se ρ, $\pi \in \mathfrak{S}_n$, $sgn\,\rho\pi = sgn\,\rho.sgn\,\pi$.

Se $\pi = \pi_1 \cdots \pi_r$ é a decomposição cíclica de $\pi \in \mathfrak{S}_n$, onde os comprimentos dos ciclos são $k_1, \dots, k_r$ respectivamente, então

$$sgn\,\pi = (-1)^{k_1-1}(-1)^{k_2-1} \cdots (-1)^{k_r-1} = (-1)^{n-r}.$$

Exemplo:

$$\pi = (23)(145)(67) \quad sgn\,\pi = (-1)^1(-1)^2(-1)^1 = (-1)^{7-3} = 1.$$

Aplicação: $A = [a_{ij}]$ matriz $n \times n$

$$det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} sgn\,\sigma\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

CAPÍTULO 6

REFERÊNCIAS

- Martin Aigner, A course in Enumeration, Springer, 2010.
- Carlos André, Fernando Ferreira, Matemática Finita, Universidade Aberta, 2000.
- Federico Ardilla, Lectures on Enumerative Combinatorics, SFSU-Los Andes, Fall 2013. http://math.sfsu.edu/federico/Clase/EC/ec.html.
- Miklós Bóna, A Walk through Combinatorics, World Scientific, 2002.
- Richard Brualdi, Introductory Combinatorics, Pearson/Prentice Hall, 2010.
- Domingos M. Cardoso, Jerzy Szymanski, Mohammad Rostami, Matemática Discreta, Combinatória, Teoria dos grafos, Algoritmos, Escolar Editora, 2009.
- Charles W. Curtis, Pioneers of representation theory : Frobenius, Burnside, Schur, and Brauer. [Providence, R.I.] : AMS ; [London] : LMS, 1999. XVI, 287 p., Série History of mathematics.
- Markus Fulmek, Christian Krattenthaler, Diskrete Mathematik, Wien Universität, Wintersemester 2008.
- George E. Martin, Counting: The Art of Enumerative Combinatorics, Springer, 2001.
- J. M. Simões Pereira, Matemática Discreta: Tópicos de Combinatória. Editora Luz da Vida. 2006.

CAPÍTULO 7

FOLHAS DE PROBLEMAS

7.1 Folha1

1: O princípio de indução matemática

1. Mostre que um conjunto com n elementos tem 2^n subconjuntos. Como é que o número de subconjuntos de um conjunto com n elementos está relacionado com o número de subconjuntos de um conjunto com $n-1$ elementos?
2. Seja $f(m)$ o número máximo de regiões em que m rectas podem dividir o plano. Mostre que $f(m) = \dfrac{m(m+1)}{2} + 1$.
3. Suponha que f é uma função definida para inteiros não negativos tal que $f(0) = 3$ e $f(n) = 2f(n-1)$. Encontre uma fórmula para $f(n)$ e mostre que ela é correcta.
4. Considere a sucessão (a_n) definida pelas relações $a_0 = 1$ e $a_{n+1} = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ se $n \geq 0$. Mostre que para todos os inteiros positivos n, se tem $a_n = 2^{n-1}$.
5. Considere a relação de Pascal $\dbinom{n-1}{k} + \dbinom{n-1}{k-1} = \dbinom{n}{k}$, com $n \geq k \geq 1$, e $\binom{n}{0} = 1$, para todo o $n \geq 0$. A partir desta relação e do facto $\binom{n}{0} = 1$, $n \geq 0$, prove que, para cada $n \geq 0$, se tem, para todo o $0 \leq k \leq n$, a seguinte fórmula $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

2: Contagem elementar

Princípio da soma. *Se $S = S_1 \cup \cdots \cup S_t$ é a união disjunta dos conjuntos S_i, $i = 1, \ldots, t$, então $|S| = \sum_{i=1}^{t} |S_i|$.*
Se $|S_1| = |S_2| = \ldots = |S_t| = m$ então $|S| = tm$.

Princípio do produto. *Se $S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_t$, onde $S_1, S_2, \ldots, S_t$ são t conjuntos não vazios e finitos, então $|S| = \prod_{i=1}^{t} |S_i|$.*
Se $|S_1| = |S_2| = \cdots = |S_t| = m$ então $|S| = m^t$.

6. Use a indução matemática para provar o princípio da soma e o princípio do produto.

   Princípio generalizado da multiplicação. *Se efectuarmos uma sequência de t escolhas para o qual*
   - *existem k_1 maneiras possíveis de fazer a primeira escolha, e*
   - *para cada maneira de fazer as primeiras $i-1$ escolhas, existem k_i maneiras de fazer a i-ésima escolha,*

   então podemos realizar a nossa sequência de escolhas em $k_1.k_2.\cdots.k_t$ maneiras.

   Princípio da bijecção. *Sejam S e T dois conjuntos finitos. Se existe uma bijecção entre S e T então $|S| = |T|$.*

   Princípio de contar de duas maneiras. *Se duas fórmulas enumeram o mesmo conjunto então elas têm que ser iguais.*

7. Use o princípio da soma para provar a relação de Pascal $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$, para $n \geq k \geq 1$. Apresente uma situação de contagem para mostrar esta igualdade. (*Sugest*ão: De um conjunto de n candidatos quantas comissões de k pessoas pode formar com o candidato preferido X e sem ele?)

8. Determine o número de números com quatro algarismos pertencentes ao conjunto $\{1, 2, \dots, 9\}$ que contêm o algarismo 5.

9. Mostre que se $n \geq k \geq 1$, o número de palavras com k dígitos num alfabeto com n letras em que nenhuma letra é usada mais do que uma vez, é $n(n-1)\cdots(n-k+1)$.

10. Quantos números existem com quatro algarismos pertencentes ao conjunto $\{1, \dots, 9\}$ de tal forma que nenhum número tenha dois dígitos iguais?

11. Determine o número de números com quatro algarismos pertencentes ao conjunto $\{1, 2, \dots, 9\}$ tais que nenhum deles tem dígitos repetidos e todos contêm o algarismo 5.

12. Quantas palavras de comprimento k podemos formar no alfabeto $\{1, \dots, n\}$?

13. Mostre que o número de números com k dígitos é 9.10^{k-1}, se $k \geq 2$, e 10 se $k = 1$.

14. Quantas palavras de comprimento n podemos formar no alfabeto $\{0, 1\}$?

15. Mostre que existe uma bijecção entre o conjunto de todas as palavras de comprimento n no alfabeto $\{0, 1\}$ e o conjunto de todos os subconjuntos de $\{1, \dots, n\}$. Use o princípio da bijecção para concluir que o número de subconjuntos de um conjunto X, onde $|X| = n$, é 2^n.

16. Mostre que o número de subconjuntos de $\{1, \dots, n\}$ que têm um número ímpar de elementos é 2^{n-1}.(*Sugestão*: Use a bijecção entre as palavras binárias de comprimento n e os subconjuntos de X. Note que toda a palavra binária

de comprimento n se obtém de uma palavra binária de comprimento $n-1$ acrescentando-lhe 0 ou 1.)

17. Mostre que podemos escrever o conjunto $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ como a união disjunta de dois conjuntos sem que nenhum seja vazio de $2^{n-1} - 1$ maneiras. (Sugestão: Observe que $X = A \cup A^c$, para todo o $A \subseteq X$ onde $A \neq \emptyset, X$, e que um contém n e o outro não.)

18. Calcule o número de números maiores do que 666 e com 3 algarismos tais que o primeiro algarismo é diferente do último.

19. Contando de duas maneiras mostre que $2\sum_{i=1}^{n} i + (n+1) = (n+1)^2$. Deduza que $\sum_{i=1}^{n} i = (n+1)n/2$.

20. Classifique os subconjuntos de dois elementos quanto ao maior elemento e use o princípio da soma para provar a igualdade $\binom{n+1}{2} = \sum_{i=1}^{n} i$.

21. Apresente uma prova bijectiva da igualdade $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, para todo $0 \leq k \leq n$. (Sugestão: Classifique os conjuntos de três elementos quanto ao maior elemento e quanto ao elemento médio.)

22. (a) Mostre que $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$, para todo o $n \geq 0$. (Soma das entradas da linha n do rectângulo de Pascal.)

    (b) Mostre que, para todo o $n, k \geq 0$, $\sum_{i=0}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$. (Soma das entradas da coluna k até à linha n do rectângulo de Pascal é igual ao elemento na linha $n+1$ e coluna $k+1$.)

    (c) Conclua, da alínea (b), que, para todo o $m, n \geq 0$, $\sum_{i=0}^{n} \binom{m+i}{i} = \binom{m+n+1}{n}$.

23. Contando de duas maneiras mostre que $\binom{n+1}{3} = \sum_{i=1}^{n} i(n-i) = \sum_{i=1}^{n} \binom{i}{2}$. (Sugestão: Classifique os conjuntos de três elementos quanto ao maior elemento e quanto ao elemento médio.)

24. Mostre que existe uma bijecção entre o conjunto dos caminhos de $A = (0,0)$ para $B = (m,n)$ $(A \neq B)$, caminhando com passos unitários apenas no sentido Este (E) ou Norte (N), e o conjunto das sequências binárias de comprimento $m+n$ com m uns e n zeros.

25. Mostre que as perguntas abaixo têm todas a mesma resposta: $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$. Quantas

    (a) maneiras existem de seleccionar r objectos distinguíveis de n objectos distinguíveis?

(b) maneiras existem de seleccionar r pessoas de n pessoas?

(c) palavras de comprimento n no alfabeto $\{x, y\}$ existem com r x's e $(n-r)$ y's, $n \geq r$?

(d) sequências binárias de comprimento n existem com r 1's e $(n-r)$ 0's?

(e) Qual é o número dos caminhos mais curtos de $A = (0,0)$ para $B = (r, n-r)$ (ou $B = (n-r, r)$), onde $n \geq r \geq 0$ e $n > 0$?

26. $\star$ São dadas n rectas no plano sem que haja um par de rectas paralelas e sem que existam três rectas que se intersectem num único ponto. Qual é o número de pontos definidos pela intersecção das rectas?

27. $\star$ Qual é número de rectângulos que se podem formar na grelha $n \times n$?

4: Função geradora de $2^{[n]}$. Identidades binomiais.

28. Escreva a função geradora de várias variáveis dos subconjuntos de [2], [3] e [4]. Deduza que $(1+x)^4 = \sum_{i=0}^{4} \binom{4}{i} x^i$, a função geradora de $2^{[4]}$ com respeito ao cardinal.

29. Prove por indução sobre n, que $(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) = \displaystyle\sum_{A \subseteq [n]} \prod_{i \in A} x_i$.

30. Prove as seguintes identidades binomiais e apresente também um argumento combinatório:

(a) Mostre que $\dbinom{n}{m}\dbinom{m}{k} = \dbinom{n}{k}\dbinom{n-k}{m-k}$, $\quad n \geq m \geq k \geq 0$.

(b) $\dbinom{n}{m}\dbinom{n-m}{k} = \dbinom{n}{k}\dbinom{n-k}{m}$. (De quantas maneiras podemos seleccionar de um grupo de n pessoas uma equipa de futebol com m pessoas e uma equipa de basquetebol com k pessoas?)

(c) $n\dbinom{n-1}{k-1} = k\dbinom{n}{k}$. (De quantas maneiras podemos escolher um subconjunto de k elementos de um conjunto de n elementos e pintar de vermelho um elemento nesse subconjunto?)

31.(a) (*Identidade de Vandermonde.*) Mostre que, para todo o $r, s, n \geq 0$,

$$\binom{r+s}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k}.$$

(Suponha que uma comissão consiste de r mulheres e s homens. De quantas maneiras podemos formar uma subcomissão de n pessoas?)

(b) Conclua que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$.

32. A presente um argumento combinatório para mostrar a igualdade

$$\binom{2k+1}{2} = \binom{2k}{2} + 2k.$$

(De quantas maneiras podemos escolher duas bolas de $2k$ bolas vermelhas distinguíveis e de 1 bola azul?)

5: Caminhos na grelha

33. Considere na grelha $m \times n$ de pontos em $\mathbb{Z}^2$, todos os caminhos de $(0,0)$ para (m,n), andando apenas com passos unitários para Este ou Norte. Seja $L(m,n)$ o número desses caminhos.
    (a) Mostre que $L(m,0) = L(0,n) = 1$.
    (b) Classificando os caminhos de acordo com o último passo, verifique que $L(m,n) = L(m-1,n) + L(m,n-1)$.
    (c) Conclua que $L(m,n) = \binom{m+n}{m}$ e que $L(m,n) = L(n,m)$.
    (d) Mostre também que $L(m,n)$ é o número de palavras de comprimento $m+n$ no alfabeto $\{E,N\}$ com exactamente m E's e n N's.

34. $\star$ Considere a seguinte variação da igualdade de Vandermonde

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{s+k}{k}\binom{n-k}{m} = \binom{s+n+1}{s+m+1}.$$

Na grelha $(s+m+1) \times (n-m)$ classifique todos os caminhos NE de acordo com a maior ordenada onde eles tocam a recta vertical $x = s$. Deduza esta identidade.

35. $\star$ *Números de Catalan.* Seja C_n o número de caminhos NE em $\mathbb{Z}^2$ de $(0,0)$ para (n,n) que nunca vão acima da diagonal $x = y$. Mostre que

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}.$$

36. (a) Mostre que $\binom{n}{k} = \frac{k+1}{n-k}\binom{n}{k+1}$. (Apresente um argumento combinatório para a igualdade $(n-k)\binom{n}{k} = (k+1)\binom{n}{k+1}$. Quantas maneiras tem de escolher uma comissão de $k+1$ pessoas e um presidente nessa comissão de entre um conjunto de n pessoas?)
    (b) (*Propriedade unimodal.*) Mostre que os coeficientes binomiais $\binom{n}{k}$ satisfazem

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \cdots < \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil} > \cdots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}.$$

(*Sugestão*: Use a alínea anterior.) Uma sucessão finita de números que primeiro cresce e depois decresce é dita *unimodal.* A linha n do triângulo de Pascal forma uma sucesão unimodal para todo o $n \geq 0$.

    (c) Conclua que $\binom{n}{\lceil n/2 \rceil} = max\{\binom{n}{k} : k \geq 0\}$.

7.2 Folha 2

Princípio da inclusão-exclusão

Sejam $A_1,\ A_2,\dots,A_n$ subconjuntos de um conjunto X. Então o número de elementos no universo X que não estão em nenhum dos suconjuntos $A_1,\ A_2,\dots,A_n$, é

$$|X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i| = |X| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1\leq i<j\leq n} |A_i \cap A_j| -$$

$$- \sum_{1\leq i<j<l\leq n} |A_i \cap A_j \cap A_l| + \cdots + (-1)^n |A_1 \cap \cdots \cap A_n|.$$

O número de elementos em um ou mais dos conjuntos $A_1,\ A_2,\dots,A_n$, é

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\leq i<j\leq n} |A_i \cap A_j| +$$

$$+ \sum_{1\leq i<j<l\leq n} |A_i \cap A_j \cap A_l| - \cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \cdots \cap A_n|.$$

Distribuição de bolas distintas por caixas distintas e contar funções

37. Quantas funções de $\{1,\dots,n\}$ para $\{1,\dots,n\}$ existem? Quantas delas são injectivas? Mostre o número de funções de $\{1,\dots,n\}$para $\{1,\dots,n\}$ que não são injectivas é $n^n - n!$.

38.(a) Sejam $|R| = r$ e $|N| = n$. Verifique que o número de funções de R para N é n^r.

(b) De quantas maneiras podem ser colocadas 7 bolas distintas em 3 caixas distintas?

(c) Quantas funções injectivas existem de um conjunto de r elementos para um conjunto de n elementos? O que conclui se $r > n$?

39.(a) De quantas maneiras podem ser colocadas r bolas distintas em n caixas distintas com nenhuma vazia?

(b) Escreva todas as funções sobrejectivas de $\{1,2,3\}$ para $\{1,2\}$.

(c) Mostre que o número de funções sobrejectivas de um conjunto de r elementos para um conjunto de dois elementos é $2^r - 2 = 2(2^{r-1} - 1)$. (São todas as funções menos aquelas cujas imagens têm cardinal 1.)

(d) Qual é o número de funções sobrejectivas de $\{1,2,3,4,5,6\}$ para $\{1,2,3\}$?

(e) Mostre que o número de funções sobrejectivas de $\{1,\dots,r\}$ para $\{1,2,3\}$ é $3^r - 3.2.(2^{r-1} - 1) - 3$. (São todas as funções menos aquelas cujas imagens têm cardinal 1 ou 2.)

(f) De quantas maneiras podem ser colocadas 6 bolas distintas em 3 caixas distintas sem caixas vazias?

40. $\star$ Seja S um conjunto com $|S| = n$. Dado $k \geq 1$, quantos k-uplos $(T_1,\dots,T_k)$ de subconjuntos de S existem tais que

(a) $T_1 \subset T_2 \subset \cdots \subset T_k = [n]$?

(b) $T_1 \subset T_2 \subset \cdots \subset T_n$ e $|T_i| = i$, $i = 1, \ldots, n$.

(c) $T_1 \subseteq T_2 \subseteq \cdots \subseteq T_k$?

41. Quantas palavras há de 10 letras que não contêm todas as cinco vogais? (Use o alfabeto com 26 letras.) de
42. Conte todas as permutações de $\{1, 2, \ldots, n\}$ em que o 1 não está na primeira posição.
43. Conte o número de inteiros de 1 a 600, inclusive, que não são divisíveis por 6.
44. Conte o número de inteiros entre 1 e 1000, inclusive, que não são divisíveis por 5, nem por 6, nem por 8.
45. Seja n um inteiro positivo. A função de Euler φ em n é o número de inteiros k primos com n, $1 \leq k \leq n$. Use o princípio da inclusão-exclusão para provar a igualdade
$$\varphi(n) = n(1 - \frac{1}{p_1}) \cdots (1 - \frac{1}{p_t}),$$
onde $p_1, \ldots, p_t$ são os primos da decomposição canónica de n.
46. Determine todos os desencontros para $n = 1, 2, 3, 4$ e conte-os.
47. (a) Mostre que D_n, o número de desencontros de $\{1, 2, \ldots, n\}$, é
$$D_n = n![1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}].$$
(b) Calcule D_5, D_6, D_7 e D_8.
48. Tem 6 bolas de 6 cores diferentes e para cada bola tem uma caixa da mesma cor. Quantos desencontros tem se nenhuma bola ficar na caixa da mesma cor?
49. De quantas maneiras poderão ser metidas n cartas em n envelopes sem que ninguém receba a carta que lhe é dirigida?
50. Mostre que $E(r, n)$, o número de permutações dos inteiros $\{1, \ldots, n\}$ onde precisamente r entre os n números se encontram nas suas posições naturais, é $E(r, n) = \binom{n}{r} D_{n-r}$.
51. Mostre que $\sum_{r=0}^{n} E(r, n) = n!$.
52. De quantas maneiras poderão ser enviadas n cartas de tal modo que r cheguem aos seus destinatários e $n - r$ cheguem trocadas?
53. $\star$ Mostre que $D_n = (n-1)(D_{n-2} + D_{n-1})$, para $n > 2$, sabendo que $D_1 = 0$ e $D_2 = 1$.

Distribuição de bolas distintas por caixas iguais e partições (não ordenadas) de um conjunto

54. (a) Determine todas as partições não ordenadas de $R = \{1, 2, 3, 4\}$ em 2 conjuntos. Quantas são?

(b) De quantas maneiras podemos distribuir 4 bolas distintas por duas caixas iguais sem nenhuma vazia?

(c) De quantas maneiras podemos distribuir 4 bolas distintas por duas caixas iguais podendo haver caixas vazias?

55. Verifique que o número de maneiras colocar r bolas distintas em n caixas iguais é igual a $\sum_{k=1}^{n} S_{r,k}$.

56. De quantas maneiras pode colocar 4 bolas distintas em 3 caixas iguais sem nenhuma vazia? e podendo ter caixas vazias?

57.(a) De quantas maneiras pode distribuir 6 bolas distintas por 4 caixas distintas e pudermos deixar caixas vazias?

(b) E se tivermos 8 bolas distintas e 4 caixas também distintas, mas exigirmos que na primeira caixa fiquem 3 bolas, na segunda caixa fiquem 2 bolas e nenhuma caixa fique vazia?

58.(a) Recorde que o número de funções sobrejectivas de $\{1,\ldots,n\}$ para $\{1,2,3\}$ é $3^n - 3.2.(2^{n-1}-1) - 3$. Encontre uma fórmula para $S_{n,3}$.

(b) Mostre que o número de funções sobrejectivas de de $\{1,\ldots,n\}$ para de $\{1,\ldots,n-1\}$ é igual a $(n-1)!\binom{n}{2}$.

59. $\star$ (*Relação de recorrência para os números de Bell.*) Prove que para todo o inteiro positivo n, $B(n+1) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B(i)$. (Sugestão: Fixe $a \in [n+1]$ e classifique as partições com respeito ao bloco que contém a.)

60. $\star$ Prove que $B(n) \leq n!$.

61. Seja m um inteiro positivo. Mostre que

$$m^n = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} k! S_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1), \text{ para } n \geq 0.$$

Conclua que o número de funções sobrejectivas de $[n]$ para $[m]$, $m, n \geq 1$, é

$$m! S_{n,m} = m^n - \sum_{k=1}^{m-1} \binom{m}{k} k! S_{n,k}.$$

62. Mostre que número de Bell, $Bell(n)$ conta o número de relações de equivalência num conjunto X de n elementos. Quantas relações de equivalência pode definir no conjunto $\{a,b,c\}$? E num conjunto com 5 elementos?
(Recorde: $S_{r,k} = S_{r-1,k-1} + kS_{r-1,k},\ r \geq 1$.)

63. Quantas relações de equivalência num conjunto X de n elementos existem com exactamente k classes de equivalência? Quantas relações de equivalência num conjunto de 5 elementos existem com exactamente 2 classes de equivalência?

64. Seja n um número natural que é o produto de primos dois distintos. Quantas factorizações possui n em inteiros > 1 não se distinguindo factorizações que diferem apenas na ordem? Qual é o número de factorizações de 30? E de 210?

Composições e distribuição de bolas iguais por caixas distintas

65. $\star$ Considere a função que a cada partição ordenada de n em k partes (positivas), $n = a_1 + \cdots + a_k$, faz corresponder o conjunto das suas $k-1$ primeiras somas parciais $\{a_1, a_1 + a_2, \ldots a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}\}$,
$a_1 + \cdots + a_k \to \{a_1, a_1 + a_2, \ldots a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}\}$.
Mostre que é uma bijecção entre as composições de n com comprimento k e os subconjuntos de cardinal $k-1$ do conjunto $[n-1]$. Conclua que o número de tais composições é $\binom{n-1}{k-1}$.

66. (a) Escreva todas as composições de quatro. Quantas são? Quantas existem com 3 partes?
 (b) Determine todas as soluções em inteiros positivos de $x_1 + x_2 + x_3 = 4$? Quantas são?
 (c) Quantas soluções em inteiros não negativos de $x_1 + x_2 + x_3 = 4$ existem?
 (d) Quantas composições fracas de 4 com comprimento 3 existem?
 (e) Quantos 3-uplos (a, b, c) de inteiros não negativos, onde $a + b + c = 4$, existem?

$\binom{n+k}{k}$.

67. $\star$ Seja $1 \leq k < n$. Mostre que k aparece $(n-k+3)2^{n-k-2}$ vezes como parte das 2^{n-1} composições de n. (Por exemplo, com $n = 4$ e $k = 2$: 2+2, 2+1+1, 1+2+1, 1+1+2, o 2 aparece 5 vezes. Exemplifique com $n = 6$ e $k = 3$.)(Sugestão: Recorde a identidade $\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} = n2^{n-1}$.)

68. Mostre que as perguntas abaixo têm todas a mesma resposta $\binom{n+k-1}{n} = \binom{n+k-1}{k-1}$. Quantas
 (a) sequências binárias existem de $k-1$ zeros e n uns?
 (b) palavras existem com n N's e $(k-1)$ E's?
 (c) sequências binárias existem com n 1's e $(k-1)$ +'s?
 (d) soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ existem?
 (e) k-uplos $(a_1, \ldots, a_k)$ de inteiros não negativos tais que $\sum_{i=1}^{k} a_i = n$ existem?
 (f) maneiras existem de colocar n bolas iguais em k caixas distintas?
 (g) maneiras existem de distribuir n laranjas por k crianças?
 (h) maneiras existem de escolher n peças de fruta de k tipos diferentes?
 (i) maneiras existem de escolher, com repetição permitida, n objectos de k objectos distinguíveis?
 (j) maneiras existem de formar multiconjuntos de n elementos no conjunto $[k]$?

69. Se seleccionarmos 3 peças de fruta, com repetição permitida, de laranjas, bananas, pêras e maças, de quantas maneiras o podemos fazer?

70. Qual é o número de maneiras de retirar 5 cartas de um baralho, repondo a carta após cada extração?

71.(a) Calcule o número de maneiras de colocar 26 bolas iguais em 5 caixas distintas. Qual é o número máximo de bolas que pode garantir numa caixa, qualquer que seja a maneira de as distribuir? Pode garantir que haja pelo menos uma caixa com 7 bolas?

(b) Calcule o número de maneiras de colocar 26 bolas iguais em 5 caixas distintas sem deixar caixas vazias.

(c) Calcule o número de maneiras de colocar 26 bolas iguais em 5 caixas distintas com pelo memos duas bolas em cada caixa.

72. Calcule o número de escolhas de dez bolas de um número ilimitado de bolas vermelhas, azuis e verdes de tal forma que (a) pelo menos 5 são vermelhas; (b) no máximo 5 são vermelhas.

73. Mostre que o número de soluções em inteiros não negativos da inequação $x_1 + \cdots + x_k \leq n$ é $\binom{n+k}{k}$.

<u>Permutações com repetição e Coeficientes multinomiais</u>

74.(a) Mostre que o número de funções de $R = \{1, \ldots, r\}$ para $N = \{y_1, \ldots, y_n\}$ tais que y_i é a imagen de a_i elementos de R, $i = 1, \ldots, n$, é $\binom{r}{a_1, a_2, \ldots, a_n}$.

(b) Quantas funções existem de $R = \{1, \ldots, 7\}$ para $N = \{1, 2, 3\}$ tais que 1 é a imagen de 2 elementos, 2 de 4 elementos, e 3 apenas de um elemento?

75. Seja A um conjunto com n elementos. De quantas maneiras podemos partir A numa lista ordenada de dois subconjuntos B e $A \backslash B$, onde B tem cardinalidade $m \leq n$.

76.(a) De quantas maneiras pode distribuir 6 bolas distintas por 4 caixas distintas e pudermos deixar caixas vazias?

(b) E se tivermos 8 bolas distintas e 4 caixas também distintas, mas exigirmos que na primeira caixa fiquem 3 bolas, na segunda caixa fiquem 2 bolas e nenhuma caixa fique vazia?

77. Mostre que

(a) $\displaystyle\sum_{a_1+a_2+a_3=n} \binom{n}{a_1, a_2, a_3} = 3^n.$

(b) De quantas maneiras podemos partir um conjunto com n elementos numa lista ordenada de três subconjuntos A_1, A_2, A_3, podendo haver blocos vazios?

(c) De quantas maneiras podemos partir um conjunto com n elementos numa lista ordenada de dois subconjuntos A_1, A_2 podendo haver blocos vazios? E um conjunto com n elementos numa lista ordenada de k subconjuntos A_1, A_2, $\ldots, A_k$ podendo haver blocos vazios?

(d) Mostre que $\displaystyle\sum_{a_1+a_2+a_3=n} \binom{n}{a_1, a_2, a_3}(-1)^{n-a_1-a_3} = 1.$

78. Dispomos das letras $a, a, a, a, b, b, b, c, c, d$. Calculando de duas maneiras distintas, mostre que o número de palavras de comprimento dez que podemos formar com estas (e apenas estas) letras é

(a) $\frac{10!}{4!3!2!}$; (*b*) $\binom{10}{4}\binom{6}{3}\binom{3}{2}\binom{1}{1}$

79.(a) Quantas palavras de comprimento dez pode formar no alfabeto $\{a, b, c, d\}$? Quantas delas têm quatro letras a, três letras b , duas letras c, e uma letra d?

(b) Quantas permutações do multiconjunto $\{a, a, a, a, b, b, b, c, c, d\}$ existem?

(c) Quantas vezes é que o termo $a^4b^3c^2d$ aparece na expansão de $(a+b+c+d)^{10}$?

(d) De quantas maneiras podemos partir um conjunto com dez elementos numa lista ordenada de quatro subconjuntos com cardinais 4,3, 2 e 1, respectivamente?

(e) De quantas maneiras podemos seleccionar dez objectos (distintos) de quatro tipos diferentes sendo quatro do primeiro tipo, três do segundo, dois do terceiro, e um do quarto?

(f) De quantas maneiras podemos distribuir dez bolas distintas por quatro caixas distintas pondo quatro na primeira caixa, três na segunda, dois na terceira, e uma na quarta?

80. Mostre que $\binom{n}{a_1,a_2,\cdots,a_k} = \frac{n!}{a_1!a_2!\cdots a_k!}$ é o número de palavras de comprimento n que podemos formar no alfabeto $\{x_1, \ldots, x_k\}$ com exactamente a_1 letras x_1, a_2 letras $x_2, \ldots$, e a_k letras x_k. Conclua que $\binom{n}{k,n-k} = \binom{n}{k}$.

81.(a) Mostre que o número de diferentes termos que aparecem na expansão multinomial $(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n$ é igual a $\binom{n+k-1}{n}$. Quantos termos tem a expansão completa de $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^6$?

(b) Qual é o coeficiente de $x_1^3x_2x_3^2$ na expansão completa de $(2x_1 - 3x_2 + 3x_3)^6$?

(c) Qual é o termo de $(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^k$ com maior coeficiente? Qual é esse coeficiente?

(d) Seja $n < k$. Qual é o maior coeficiente em $(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n$?

82. Determine o número de caminhos mais curtos, na caixa 3 dimensional, em $\mathbb{Z}^3$, de dimensões $3 \times 2 \times 2$, da origem para o ponto de coordenadas $(3, 2, 2)$.

83.(a) Prove a igualdade $\displaystyle\sum_{a_1+a_2+a_3+a_4=5} \binom{5}{a_1, a_2, a_3, a_4} = 4^5$, onde a soma é sobre todas as composições fracas de 5 em quatro partes.

(b) Mostre que o número de maneiras de distribuir 5 bolas distintas por 4 caixas distintas sem deixar caixas vazias é igual a $4!S_{5,4}$.

(c) Dê uma explicação para a igualdade $4!S_{5,4} = \binom{5}{1\,1\,1\,2} + \binom{5}{1\,1\,2\,1} + \binom{5}{1\,2\,1\,1} + \binom{5}{2\,1\,1\,1}$.

84. Explique porque é que $S_{5,3} = \binom{5}{3\,2} + \frac{1}{2}\binom{5}{2\,2\,1}$.

7.3 Folha 3

Distribuição condicionada de bolas iguais por caixas distintas.

85. Determine o número de soluções inteiras da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ onde $x_1 \geq 3$, $x_2 \geq 1$, $x_3 \geq 0$ e $x_4 \geq 5$. (Faça $y_1 = x_1 - 3 \geq 0$, $y_2 = x_2 - 1 \geq 0$,$y_3 = x_3 \geq 0$, $y_4 = x_4 - 5 \geq 0$, e resolva $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 11$ em inteiros não negativos.)

86.(a) Determine o número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ onde $0 \leq x_1 \leq 3$, $0 \leq x_2 \leq 4$, e $0 \leq x_3 \leq 5$.

(b) Quantas maneiras temos de escolher dez peças de fruta de um cesto com exactamente 3 laranjas, 4 maças e 5 bananas?

87. Qual é o número de soluções inteiras da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$ satisfazendo a $1 \leq x_1 \leq 5$, $-2 \leq x_2 \leq 4$, $0 \leq x_3 \leq 5$ e $3 \leq x_4 \leq 9$.

88.(a) Recorde que o número de soluções em inteiros não negativos da equação $x_1 + \cdots + x_r = n$ é $\binom{n+r-1}{n}$. Conclua que o número de soluções em inteiros positivos da equação $x_1 + \cdots + x_r = n$ é $\binom{n-r+r-1}{n-r} = \binom{n-1}{n-r}$.

(b) Qual é o número de maneiras de distribuir n bolas iguais em r caixas distintas sem deixar caixas vazias?

(c) $\star$ Mostre que o número de soluções em inteiros não negativos da equação $x_1 + \cdots + x_r = n$ com a restrição adicional $x_i < s$, para $1 \leq i \leq r$, é $\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{s} \rfloor} (-1)^j \binom{r}{j} \left(\binom{r}{n-js}\right)$.

(d) De quantas maneiras podemos distribuir 4 bolas iguais por 6 caixas distintas havendo no máximo 2 bolas por caixa? E havendo no máximo 4? E se for 5?

89. $\star$ Mostre que

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{r}{j} \binom{n+r-j-1}{r-1} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{r}{j} \left(\binom{r}{n-j}\right) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n > 0. \end{cases}$$

Distribuição de bolas iguais por caixas iguais e partições (não ordenadas) de um número

90. Recorde que $p(n)$ é o número de partições do número n. Verifique que: $p(1) = 1$, $p(2) = 2$, $p(3) = 3$, $p(4) = 5$, $p(5) = 7$, $p(6) = 11$ e $p(7) = 15$.

91.(a) Mostre que o número de maneiras de colocar r bolas iguais em n caixas iguais, sem caixas vazias, é $p(r, n)$.

(b) Mostre que $p(r)$ é o número de maneiras de colocar r bolas iguais em r caixas iguais podendo deixar caixas vazias. De quantas maneiras podemos distribuir 5 bolas iguais por cinco caixas iguais? De quantas maneiras podemos distribuir 10 bolas iguais por cinco caixas iguais, sem caixas vazias? Conclua que $p(2r, r) = p(r)$.

(c) Conclua que o número de maneiras pode colocar r bolas iguais em n caixas iguais é $p(r + n, n)$

92. Mostre que são satisfeitas as seguintes relações de recorrência

(a) $p(r, n) = \sum_{k=1}^{n} p(r - n, k), \quad r > n > 1.$

(b) $p(r, n) = p(r - 1, n - 1) + p(r - n, n), \quad r > n > 1.$

(c) Calcule $p(6, 3)$. De quantas maneiras podemos colocar 6 bolas iguais em 3 caixas iguais sem caixas vazias?

93. Determine o número de maneiras de distribiuir 7 bolas iguais
(a) por 7 caixas iguais sem caixas vazias. (b) por 4 caixas iguais podendo ficar caixas vazias. (c) por 4 caixas iguais sem caixas vazias.

94. Mostre que o número de partições de r com

(a) k partes é igual ao número de partições de r com a parte maior igual a k.

(b) Exiba uma bijeção entre as partições de 7 com a parte maior exactamente igual a 3, e as partições de 7 com três partes.

(c) no máximo k partes é igual ao número de partições de r em partes de tamanho não superior a k.

(d) com a parte maior igual a 2 é $\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor$. (Sugestão: Use a relação de recorrência em 92(a).)

95. Indique duas partições de 6 que sejam conjugadas uma da outra. Indique também partições que sejam auto-conjugadas. Quantas consegue encontrar?

96. Prove que o número de partições auto-conjugadas de n é igual ao número de partições de n em partes distintas ímpares. O que é que este resultado tem a ver com o exercício anterior?

97. Mostre que o número de soluções em inteiros não negativos de $y_1+y_2+y_3+y_4 = r$ tais que $y_4 \geq y_3 \geq y_2 \geq y_1 \geq 0$, é igual a $p(r; \leq 4)$, o número de partições de r com no máximo 4 partes.

98. Mostre que $p(r)$, o número de partições de r, é o mesmo que o número de soluções em inteiros não negativos da equação $1x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + rx_r = r$.

99. (a) Número de composições fracas de r de comprimento k é igual ao número de soluções em inteiros não negativos da equação $x_1 + \cdots + x_k = r$, dado por $\binom{r+k-1}{r}$.

(b) Número de composições de r de comprimento k é igual ao número de soluções em inteiros positivos da equação $x_1 + \cdots + x_k = r$, dado por $\binom{r-1}{r-k}$.

(c) Número de partições de r, $p(r)$, é o número de soluções em inteiros não negativos da equação $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + rx_r = r$.

(d) De quantas maneiras pode distribuir 6 bolas iguais por 3 caixas iguais podendo deixar caixas vazias? E sem deixar caixas vazias?

(e) Quantas soluções em inteiros não negativos tem a equação $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 = 6$?

100. Seja $a = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ uma partição de n, e m_i a multiplicidade de $i \geq 1$ como uma parte de a. Por exemplo, $a = (3, 3, 1, 1)$ é uma partição de 8 e $m_1 = 2$, $m_2 = 0$, $m_3 = 2$ e $m_i = 0$, $i \geq 4$.

(a) Mostre que o número de vectores distintos que obtém reordenando (permutando) de todas as maneiras possíveis as entradas de a é $\frac{k!}{\prod_{i\geq 1} m_i!}$. (Note que $0! = 1$.)

(b) Quantos vectores distintos obtém reordenando (permutando) as entradas de $(3, 3, 1, 1)$? Escreva-os todos.

101.(a) De quantas maneiras pode distribuir n objectos distintos por k caixas distintas, pondo a_1 objectos na caixa 1, a_2 objectos na caixa 2, ..., e a_k objectos na caixa k?

(b) De quantas maneiras pode distribuir 4 bolas distintas por 2 caixas iguais, de modo a que haja 2 caixas com 2 bolas cada? 1 caixa com 1 bola, 1 caixa com 3 bolas? E se fizer a distribuição das 4 bolas distintas por 3 caixas iguais sem deixar caixas vazias?

(c) De quantas maneiras pode distribuir n bolas distintas por k caixas iguais, sem deixar caixas vazias, de modo a que haja m_1 caixas com 1 bola, m_2 caixas com 2 bolas, ..., m_j caixas com j bolas, onde $m_1+2m_2+\cdots+jm_j = n$ e $m_1 + \cdots + m_j = k$? Se $a = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ for a partição de n, onde m_i é a multiplicidade de i como uma parte de a, então a resposta é o número de partições do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ que são do tipo a, isto é, igual a

$$\frac{\binom{n}{a_1, a_2, \cdots, a_k}}{\prod_{i\geq 1} m_i!}.$$

(Por exemplo, os conjuntos $\{1, 5, 6\}$, $\{2, 7\}$, $\{3, 9\}$, $\{4, 8\}$ e $\{10\}$ são uma partição do conjunto $\{1, 2, \ldots, 10\}$ do tipo $(3, 2, 2, 2, 1)$.)

102. Mostre que se $a = (2, 1, \ldots, 1)$ é uma partição de n então o número de partições do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ que são do tipo a é igual a $\binom{n}{2}$.

103.(a) De quantas maneiras pode distribuir $9n$ objectos distintos por 9 caixas iguais, cada uma com n objectos?

(b) Use um modelo combinatório para mostrar que $\dfrac{(9n)!}{9! \times (n!)^9}$ é um número inteiro.

<u>Permutações, ciclos e números de Stirling de primeira espécie</u>

104. Seja $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 6 & 8 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.

(a) Determine a representação em palavra e a forma cíclica de σ.

(b) Indique o tipo desta permutação.

105.(a) Considere a decomposição cíclica $\sigma = (135)(24)(67)$. Qual é o menor inteiro positivo k tal que $\sigma^k = id$?

(b) Suponha que $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$ são ciclos dois a dois disjuntos de comprimentos respectivamente $k_1, k_2, \ldots, k_r$ onde $k_1 + \cdots + k_r = n$. Seja $\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_r$ uma permutação de n elementos. Qual é o menor inteiro positivo k tal que $\sigma^k = id$?

(c) Mostre que $(1235)(46) = (156)(123)(456)$. Qual é a decomposição cíclica de $(1235)(46)$?

106. Determine todos os ciclos de comprimento 3 distintos no conjunto $\{1, 2, 3\}$. Faça o mesmo para ciclos de comprimento 4 em $\{1, 2, 3, 4\}$. Quantos são?

107. Mostre que

(a) $c_{n,1} = (n-1)!$. Interprete esta igualdade como o número de maneiras de sentar n pessoas à volta de uma mesa circular. (Consideramos duas maneiras como idênticas se todas as pessoas têm o mesmo vizinho à esquerda na primeira vez que se sentam e na segunda.)

(b) $c_{n,n-1} = \binom{n}{2}$. (c) $c_{n,n} = 1$.

108. Prove a relação de recorrência para os números de Stirling de primeira espécie sem sinal

$c_{n,k} = c_{n-1,k-1} + (n-1)c_{n-1,k}, \quad n > 1.$

109. Quantas permutações de $\mathfrak{S}_4$ têm exactamente dois ciclos?

110. Mostre que o número de permutações de n elementos com k ciclos, onde cada ciclo contém os elementos por ordem crescente, é o número de Stirling $S_{n,k}$ de segunda espécie. (Sugestão: Os ciclos desempenham o papel de caixas indistinguíveis.)

111. Quantas permutações de n elementos são do tipo $(0, 0, \ldots, 0, 1)$?

112. Mostre que o número total de tipos possíveis de uma permutação de n elementos é $p(n)$. (Sugestão: Recorde o número de soluções em inteiros não negativos da equação $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n = n$.)

113. Quantas permutações de 6 elementos existem com 2 ciclos de comprimento 3? E com 3 ciclos de comprimento 2.

114. Considere o grupo simétrico $\mathfrak{S}_7$.

(a) Quantos tipos de permutações existem?

(b) Dê dois exemplos de tipos de permutação e construa duas permutações com esses tipos.

(c) Quantas permutações do tipo $(0, 2, 1, 0, 0, 0, 0)$ existem?

115. Prove a seguinte fórmula de Cauchy $\displaystyle\sum_{1a_1+2a_2+\cdots+na_n=n} \frac{1}{a_1!1^{a_1}a_2!2^{a_2}\cdots a_n!n^{a_n}} = 1.$

(Quantas parcelas tem esta soma?)

116. Seja n um inteiro não negativo. Mostre que

(a) $\sum_{k=0}^{n} c_{n,k}x^k = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)$.

(b) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}c_{n,k}x^k = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$.

7.4 Enunciados, Frequências e Exames resolvidos

Departamento de Matemática da F.C.T.U.C.

Frequência 2 de Matemática Discreta

Licenciatura em Matemática

(Sem consulta) versão A 28/5/2013

Nome (completo): ______________________________

Nota: Indique os cálculos que efectuar e justifique as respostas.

1. Seja $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 6 & 8 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Indique a representação de σ em palavra. Determine a decomposição cíclica de σ e escreva-a na forma canónica.

(b) Indique o tipo desta permutação. Quantas permutações deste tipo existem?

2. Prove a relação de recorrência para os números de Stirling de primeira espécie

$$s_{n,k} = s_{n-1,k-1} + (n-1)s_{n-1,k}, \quad n \geq 1,$$

com as condições iniciais $s_{0,0} := 1$ e $s_{0,k} := 0$, se $k \geq 1$.

3.(a) Verifique que o coeficiente de z^k em $(1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \cdots)^n$ conta o número de maneiras de escolher k objectos de entre n tipos podendo repetir.

(b) Mostre que $(e^z)^5$ é a função geradora exponencial da sucessão $(a_r)_{r\geq 0}$ onde a_r é o número de maneiras de formar palavras de comprimento r num alfabeto de 5 letras podendo repetir. Indique o coeficiente de $z^7/7!$ em $(e^z)^5$. O que conta esse coeficiente?

4.(a) Mostre que existe um grafo de ordem 6 com 15 arestas. Quantos desses grafos, distintos, existem no conjunto dos vértices $\{1, \ldots, 6\}$?

(b) Existe algum grafo de ordem 6 cuja sequência dos graus por ordem decrescente seja 444410?

5. Para $n \geq 0$, o cubo n-dimensional Q_n é o grafo cujos vértices são as sequências binárias de comprimento n, isto é, $V = \{0,1\}^n$, onde duas sequências de V formam uma aresta se e só se elas diferem entre si exactamente numa posição.

(a) Quantos vértices tem Q_n? Qual é o grau de cada vértice de Q_n?

(b) Quantas arestas tem Q_n?

(c) Determine a cintura de Q_n, $n \geq 2$.

(d) Mostre que Q_3 é hamiltoniano mas não é euleriano.

Departamento de Matemática da F.C.T.U.C.

Exame de Recurso de Matemática Discreta

Licenciatura em Matemática

Duração: 2:30$^{\mathrm{mn}}$ (Sem consulta) 27/6/2013

Nota: *Indique os cálculos que efectuar e justifique as respostas.*

1. Mostre que se colocarmos 5 pessoas numa sala não tem a garantia de existirem pelo menos 3 pessoas que se conhecem mutuamente ou pelo menos 3 pessoas que se desconhecem mutuamente. (Estamos a assumir que quaisquer duas pessoas ou se conhecem mutuamente ou se desconhecem mutuamente.)

2. Classifique conjuntos para provar a igualdade $\binom{n+1}{2} = \sum_{i=1}^{n} i$.

3.(a) Mostre que existe uma bijecção entre o conjunto dos caminhos de $A = (0,0)$ para $B = (n,k)$, $n \geq 0$, $k \geq 0$, andando apenas com passos unitários, horizontais no sentido Este (E), ou verticais no sentido Norte (N), e o conjunto das sequências binárias de comprimento $n+k$ com n uns e k zeros. Quantos destes caminhos existem de A para B, onde $A \neq B$?

(b) De quantas maneiras pode distribuir n bolas iguais por $k+1$ caixas distintas?

(c) De quantas maneiras pode distribuir 10 bolas iguais por 3 caixas distintas com pelo menos 5 bolas numa das caixas?

4.(a) Prove que o número de funções sobrejectivas de um conjunto com r elementos para um conjunto com n elementos é igual a

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^r.$$

(b) O que conta o número de Stirling de segunda espécie $S_{r,n}$? Qual a relação entre $S_{r,n}$ e o número obtido na alínea (a)?

(c) De quantas maneiras pode distribuir 5 bolas distintas por 4 caixas iguais sem deixar caixas vazias? E se distribuir as mesmas bolas por 4 caixas distintas sem deixar caixas vazias?

5. Prove a seguinte relação de recorrência para a partição do número r em n partes
$$p(r,n) = p(r-1,n-1) + p(r-n,n), \text{ com } p(0,0) := 1.$$

6.(a) Mostre que $\displaystyle\sum_{a_1+a_2+a_3=r} \binom{r}{a_1, a_2, a_3} = 3^r.$

(b) Escreva a função geradora exponencial da sucessão $(a_r)_{r\geq 0}$ onde a_r é o número de maneiras de formar palavras de comprimento r num alfabeto de 3 letras podendo repetir. Determine o coeficiente de $z^r/r!$. O que conta?

7.(a) Prove que se $G = (V,E)$ é um grafo, então $\sum_{v\in V} d(v) = 2|E|$.

(b) Existe algum grafo de ordem 6 cuja sequência dos graus por ordem decrescente seja 664211?

(c) Prove que se um grafo G de ordem n é isomorfo ao seu complementar então $|E(G)| = n(n-1)/4$. Dê um exemplo de um grafo isomorfo ao seu complementar.

(d) Mostre que o cubo Q_3 é um grafo bipartido.

8.(a) Dê exemplos de dois grafos tais que num existe um circuito de Euler mas não existe um ciclo de Hamilton; e no outro nem existe um circuito de Euler nem um ciclo de Hamilton.

(b) Defina árvore. Uma árvore pode ter grau mínimo dois? Justifique.

Departamento de Matemática da F.C.T.U.C.

Frequência 2 de Matemática Discreta

Licenciatura em Matemática

Duração: 1:30$^{\text{mn}}$ (Sem consulta) 22/5/2014

Nome (completo): ______________________________

Nota: Indique os cálculos que efectuar e justifique as respostas.

1.(a) Indique o diagrama de Ferrers da partição $(3,2,1)$ de 6.

(b) Mostre que o número de partições auto-conjugadas de n é igual ao número de partições de n em partes ímpares distintas.

(c) Quantas partições de 6 auto-conjugadas existem? Indique-as.

2. Considere a permutação $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 7 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ em $\mathfrak{S}_7$.

(a) Determine a decomposição cíclica de σ e escreva-a na forma canónica.

(b) Indique o tipo desta permutação. Determine o número de permutações em $\mathfrak{S}_7$ do tipo $(2, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$.

(c) Calcule o número de Stirling de primeira espécie $s_{7,6}$.

(d) Determine o conjunto das inversões de σ. Diga se a permutação é par ou ímpar.

3. Considere a função geradora do número de permutações de $\mathfrak{S}_4$ com respeito ao número de inversões

$$\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_4} q^{\mathrm{inv}(\pi)} = (1+q)(1+q+q^2)(1+q+q^2+q^3),$$

onde $inv(\pi)$ é o número de inversões de π.

(a) Calcule o coeficiente de q^6. O que conta?

(b) Usando a função geradora acima, conclua que $\mathfrak{S}_4$ tem 12 permutações pares.

4.(a) Prove que se $G = (V, E)$ é um grafo, então $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$.

(b) Existe algum grafo de ordem 6 cuja sequência dos graus por ordem decrescente seja 543221?

(c) Mostre que se o grafo $G = (V, E)$ tem 11 vértices e $\sum_{v \in V} d(v) \geq 33$ então G tem um vértice de grau pelo menos 4.

5. Considere o cubo ou hexaedro como grafo e responda às seguintes questões:

(a) É Euleriano?

(b) É Hamiltoniano?

(c) Qual é o ciclo de maior comprimento que pode encontrar?

(d) Quantas arestas tem o grafo complementar?

(e) Indique um subgrafo do cubo que seja Euleriano e Hamiltoniano.

Departamento de Matemática da F.C.T.U.C.

Exame de Matemática Discreta

Licenciatura em Matemática

Duração: 2:30$^{\mathrm{mn}}$ (Sem consulta) 7/7/2015

Nota: *Indique os cálculos que efectuar e justifique as respostas.*

1.(a) Enuncie uma forma do princípio da gaiola dos pombos e demonstre-a.

(b) Mostre que numa lista de 11 números $a_1, a_2, \ldots, a_{11}$, onde cada $a_i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, há pelo menos três iguais. Porque é que não pode garantir que haja quatro iguais?

2.(a) Sejam n e k inteiros não negativos. Dê uma definição enumerativa do número $\binom{n}{k}$.

(b) Use o binómio de Newton para provar a identidade $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} = n2^{n-1}$, onde n é um número inteiro positivo.

(c) Mostre que o número de composições de n é 2^{n-1}. Quantas delas têm comprimento k?

3.(a) Quantos multiconjuntos de cardinal 4 pode formar no conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$?

(b) Quantas funções monótonas fracamente crescentes existem de $\{1, 2, 3, 4\} \mapsto \{1, 2, 3, 4\}$?

(c) Determine o número de soluções em inteiros não negativos da equação

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 5.$$

4.(a) Prove a igualdade $\displaystyle\sum_{a_1+a_2+a_3=5} \binom{5}{a_1, a_2, a_3} = 3^5$, onde a soma é sobre todas as composições fracas de 5 em três partes.

(b) Mostre que o número de maneiras de distribuir 5 bolas distintas por 3 caixas distintas sem deixar caixas vazias é igual a $3!S_{5,3}$.

(c) Sem efectuar cálculos, dê uma explicação para a igualdade $3!S_{5,3} = \binom{5}{1\;2\;2} + \binom{5}{2\;2\;1} + \binom{5}{2\;1\;2}$.

5. Considere a função geradora do número de permutações de $\mathfrak{S}_4$ com respeito ao número de inversões

$$\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_4} q^{\mathrm{inv}(\pi)} = (1+q)(1+q+q^2)(1+q+q^2+q^3),$$

onde $inv(\pi)$ é o número de inversões de π.

(a) Calcule o coeficiente de q^2. O que conta? Indique todas as permutações de $\mathfrak{S}_4$ com 2 inversões.

(b) Usando a função geradora acima, conclua que $\mathfrak{S}_4$ tem 12 permutações ímpares.

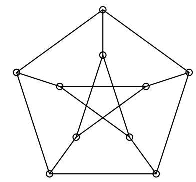
6.(a) Quantos grafos de ordem 7 existem no conjunto $V = \{1, 2, \ldots, 7\}$? Indique um grafo conexo e sem ciclos no conjunto V.

(b) Prove que num grafo simples de ordem pelo menos dois existem pelo menos dois vértices com o mesmo grau.

(c) Existe algum grafo de ordem 7 cuja sequência dos graus seja 5321100? Justifique.

(d) Considere o grafo C_5. Mostre que C_5 é isomorfo ao seu complementar.

7.(a) Considere o grafo de Petersen



i. É Euleriano? É bipartido? Justifique.

ii. Indique uma árvore geradora deste grafo.

(b) Mostre que $K_{3,3}$ não é planar.

Departamento de Matemática da F.C.T.U.C.

Uma resolução da frequência 2 de Matemática Discreta

Licenciatura em Matemática

Duração: 1h 30 (Sem consulta) 14/6/2022

Nota: Indique os cálculos que efectuar e justifique as respostas.

1.(a) Quantas funções existem de $\{1,\ldots,n\}$ para $\{1,\ldots,n-1\}$?

Uma função $f:\{1,\ldots,n\}\to\{1,\ldots,n-1\}$ fica definida pela sequência

$$(f(1),\ldots,f(n))\in\underbrace{\{1,\ldots,n-1\}\times\cdots\times\{1,\ldots,n-1\}}_{n}=\{1,\ldots,n-1\}^n$$

e toda a sequñcia em $\{1,\ldots,n-1\}^n$ define uma função f de $\{1,\ldots,n\}$ para $\{1,\ldots,n-1\}$. Logo, pelo princípio do produto, o número total de funções de $\{1,\ldots,n\}$ para $\{1,\ldots,n-1\}$ é

$$|\underbrace{\{1,\ldots,n-1\}\times\cdots\times\{1,\ldots,n-1\}}_{n}|=|\{1,\ldots,n-1\}|^n=(n-1)^n.$$

(b) Calcule o número de Stirling de segunda espécie $S_{6,5}$.
Sabemos que $S_{n,n-1}=\binom{n}{2}$, logo

$$S_{6,5}=\binom{6}{2}=1+2+3+4+5.$$

Alternativa, usar a relação de recorrência para os números de Stirling de segunda espécie.

(c) Explique porque é que o número de funções sobrejectivas de $\{1,\ldots,n\}$ para $\{1,\ldots,n-1\}$ é igual a $(n-1)!\binom{n}{2}$.
O número de funções sobrejectivas de $\{1,\ldots,n\}$ para $\{1,\ldots,n-1\}$ é igual ao número de maneiras de distribuir n bolas distintas por $n-1$ caixas distintas sem deixar caixas vazias.
$S_{n,n-1}=\binom{n}{2}$ é o número de maneiras de distruibuir n bolas distintas por $n-1$ caixas iguais sem deixar caixas vazias. Ou seja, apenas temos de

escolher duas bolas de entre n bolas distintas, $\binom{n}{2}$ *escolhas, e colocar as duas bolas numa caixa qualquer e as restantes* $n-2$ *bolas são distribuídas pelas* $n-2$ *caixas restantes colocando 1 bola em cada porque as caixas não se distiguem. Como as caixas não se distinguem a distribuição das bolas é apenas distinguível pela ecolha das duas bolas (a escolha de 2 bolas determina automáticamente a selecção das restantes* $n-2$ *bolas). Temos então* $\binom{n}{2}$ *distribuições de bolas.*

Para distinguir as $n-1$ *caixas em cada uma das* $\binom{n}{2}$ *escolhas de 2 bolas distintas, vamos etiquetar de* $1,\ldots,n-1$ *as* $n-1$ *caixas e em seguida considerar as* $(n-1)!$ *listas das* $n-1$ *caixas numeradas.*

Para cada escolha de duas bolas temos agora $(n-1)!$ *distribuições dessas duas bolas. Pelo princípio da soma, temos agora* $\binom{n}{2}(n-1)!$ *distribuições de* n *bolas distintas por* $n-1$ *caixas distintas. como se pretendia mostrar.*

2.(a) Prove a igualdade $\displaystyle\sum_{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=6}\binom{6}{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5}=5^6$, onde a soma é sobre todas as composições fracas de 6 em cinco partes. *Prova: Consequência do teorema multinomial,*

$$(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)^6=\sum_{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=6}\binom{6}{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5}x_1^{a_1}x_2^{a_2}x_3^{a_3}x_4^{a_4}x_5^{a_5}x_6^{a_6}.$$

Fazendo $x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=x_6=1$ *na expressão acima, obtemos*

$$\sum_{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=6}\binom{6}{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5}=5^6.$$

(b) Mostre que o número de maneiras de distribuir 6 bolas distintas por 5 caixas distintas sem deixar caixas vazias é igual a $5!S_{6,5}$.

É igual ao número de funções sobrejectivas de $\{1,\ldots,6\}$ *para* $\{1,\ldots,5\}$ *que provámos em 1(c) ser igual a* $5!S_{6,5}$.

(c) Sem efectuar cálculos, dê uma explicação para a igualdade $5!S_{6,5}=5\binom{6}{2\;1\;1\;1\;1}$.

$5!S_{6,5}$ *é o número de funções sobrejectivas de* $\{1,\ldots,6\}$ *para* $\{1,\ldots,5\}$. *Considerando as cinco pré-imagens de uma função de* $\{1,\ldots,6\}$ *para* $\{1,\ldots,5\}$, *isto é o mesmo que partir um conjunto de 6 elementos numa lista ordenada de cinco conjuntos não vazios. Isto significa que cada uma das listas ordenadas tem um conjunto com dois elementos e os restantes quatro conjuntos com apenas um elemento. Cada uma dessas listas ordenadas de conjuntos não vazioz* A_1,A_2,A_3,A_4,A_5 *não vazios e cuja soma dos cardinais é 6, tem uma das seguintes sequências de cardinais*

$$2,1,1,1;\;1,2,1,1;\;1,1,2,1;\;1,1,1,2$$

O número de maneiras de partir o conjunto $\{1,\ldots,6\}$ *numa lista ordenada de conjuntos* A_1,A_2,A_3,A_4,A_5 *com cardinais* a_1, a_2,a_3,a_4,a_5 *respecti-*

vamente é

$$\binom{6}{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5}.$$

Logo, pelo princípio da soma, o número de maneiras de partir um conjunto de 6 elementos numa lista ordenada de cinco conjuntos não vazios é

$$\binom{6}{2,1,1,1,1}+\binom{6}{1,2,1,1,1}+\binom{6}{1,1,2,1,1}+\binom{6}{1,1,1,2,1}+\binom{6}{1,1,1,1,2}.$$

Porém, $\binom{6}{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5} = \binom{6}{b_1,b_2,b_3,b_4,b_5}$ *sendo* b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 *uma permutação qualquer de* a_1, a_2, a_3, a_4, a_5.

Portanto,

$$\begin{aligned} 5!S_{6,5} &= \binom{6}{2,1,1,1,1}+\binom{6}{1,2,1,1,1}+\binom{6}{1,1,2,1,1}+\binom{6}{1,1,1,2,1}+\binom{6}{1,1,1,1,2} \\ &= 5\binom{6}{2,1,1,1,1}. \end{aligned}$$

3.(a) Sendo A_1, A_2, A_3, A_4 subconjuntos do conjunto finito X, escreva uma fórmula para $|X \setminus \bigcup_{i=1}^{4} A_i|$.

$$\begin{aligned} |X \setminus \bigcup_{i=1}^{4} A_i| = |X| - (&|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| \\ &- |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_4| - |A_3 \cap A_4| \\ &+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\ &- |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|). \end{aligned}$$

(b) Determine o número de soluções em inteiros não negativos da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ onde $0 \le x_1 \le 3$, $0 \le x_2 \le 4$, e $0 \le x_3 \le 5$.

Resolvido um exercício análogo na aula: exercício 77 (a) da folha 3.

4. Contando de duas maneiras mostre que

(a) i. $\binom{n+1}{5} = \sum_{i=1}^{n} \binom{i}{2}\binom{n-i}{2}$.

Sugestão: Classifique os conjuntos de cinco elementos quanto ao elemento médio. *Considere-se o elemento* $i+1 \in \{1, \ldots, n+1\}$. *Temos de escolher dois elementos em* $\{1, \ldots, i\}$ *e dois elentos em* $\{i+2, \ldots, n+1\}$ *para formar um conjunto com cinco elementos que inclua o elemento* $i+1$. *Para cada* $i+1$ *temos* $\binom{i}{2}\binom{n-i}{2}$ *maneiras de formar um conjunto de cinco elementos no conjunto* $\{1, \ldots, n, n+1\}$. *Pelo princípio da soma o número de maneiras de escolher um conjunto de cinco elementos no conjunto* $\{1, \ldots, n, n+1\}$ *é*

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{i}{2}\binom{n-i}{2}.$$

$0 = \binom{0}{2} = \binom{1}{2}$

ii. $\binom{n+1}{5} = \sum_{i=1}^{n} \binom{i}{4}$.

Sugestão: Classifique os conjuntos de cinco elementos quanto ao maior elemento.

Resolvido na aula. Ver slides da aula 7.

(b) Calcule $\sum_{i=1}^{123} \binom{i}{4}$. Mostre que o valor obtido é o número de soluções em inteiros não negativos da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 119$.

Pela alínea anterior com $n = 123$, $\sum_{i=1}^{123} \binom{i}{4} = \binom{124}{5}$. *O número de soluções em inteiros não negativos da equação* $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 119$ *é igual número de soluções em inteiros não negativos das equações* $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = a$, *para* $a = 0, 1, \ldots, 119$. *Ou seja, o número de soluções é* $\sum_{i=0}^{119} \binom{i+4}{4} = \sum_{i=1}^{123} \binom{i}{4}$.

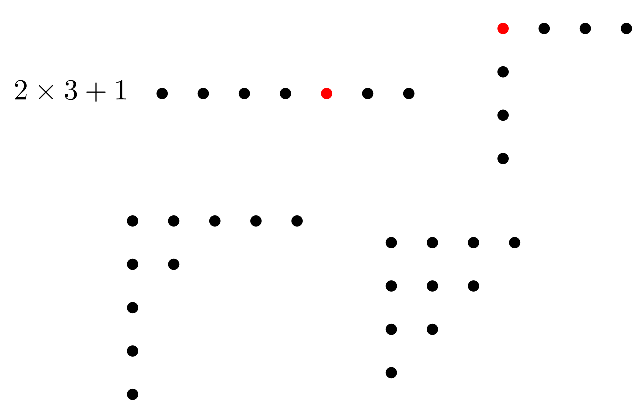
Em alternativa pode usar a bijecção da aula 11, slides aula 11.

5. Quantas partições auto conjugadas de 10 existem? Indique-as.

O número de partições autoconjugadas de 10 é igual ao número de maneiras de partir o número 10 em partes ímpares distintas:

$$10 = 9 + 1, \; 7 + 3$$

Existem duas partições autoconjugadas que se obtêm dobrando as partes ímpares ao meio: $9+1$ *dá origem a partição autoconjugada* 52111 *e* $7+3$ *dá origem à partição autoconjugada* 4321,



Cotação: 1 - 2.0; 2 - 2.0; 3 - 2,25; 4 - 2,25; 5 - 1.5.

Relações de recorrência:

$S_{r,k} = S_{r-1,k-1} + kS_{r-1,k}, \; r \geq 1.$

$p(r, n) = p(r-1, n-1) + p(r-n, n), \; r > n > 1.$

Departamento de Matemática da F.C.T.U.C.

Frequência 2 de Matemática Discreta

Licenciatura em Matemática

Duração: 1h 30^{mn} (Sem consulta) 13/6/2023

Nota: Indique os cálculos que efectuar e justifique as respostas.

1.(a) Sejam n e k inteiros não negativos. Dê uma definição enumerativa do número $\binom{n}{k}$.

É o número de subconjuntos com k elementos que podemos formar num conjunto de n elementos.

(b) Enuncie o princípio da bijecção.

Sejam S e T dois conjuntos finitos. Se existe uma bijeção entre S e T então S e T têm o mesmo cardinal.

(c) Use o princípio da bijecção para mostrar que o número de subconjuntos de um conjunto com n elementos é igual ao número de palavras binárias de comprimento n.

Sejam $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, 2^X o conjunto das partes de X e

$$\begin{aligned} f : 2^X &\to T = \{\text{palavras binárias de comprimento } n\} \\ A &\mapsto a_1 a_2 \cdots a_n \end{aligned}$$

tal que $a_i = \begin{cases} 1, & i \in A \\ 0, & i \notin A, \end{cases}$

f é injectiva porque $f(A) = f(B) = a_1 \cdots a_n \Rightarrow A = B = \{i \in X : a_i = 1\}$.
f é sobrejectiva. Dada a palavra binária $w = a_1 \cdots a_n$, seja $A = \{i \in X : a_i = 1\}$. Então $f(A) = w$. Logo f é uma bijeção entre 2^X e T.

(d) Dê uma explicação para a igualdade $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Ambos os lados da igualdade contam o número de subconjuntos que podemos formar num conjunto de n elementos.

O lado direito diz que o número de subconjuntos que podemos formar num conjunto de n elementos é igual a 2^n pois como vimos na alínea anterior é igual ao número de palavras binárias de comprimento n.

O lado esquerdo conta o número de subconjuntos que podemos formar num conjunto de n elementos de acordo com o cardinal $k = 0, \ldots, n$, dos subconjuntos. Existem $\binom{n}{k}$ subconjuntos de cardinal k, para $k = 0, \ldots, n$. Pelo princípio da adição o número total de subconjuntos que podemos formar nun conjunto de n elementos é igual $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

(e) Use o binómio de Newton para provar a identidade $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{2k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{2k+1}$, $n\geq 1$.

Veja-se a aula 4-5.

(f) Mostre que $\sum_{k=0}^{50}\binom{50}{2k+1}=2^{49}$.

Das alíneas anteriores

$$2^{50}=\sum_{k=0}^{50}\binom{50}{k}=\sum_{k=0}^{50}\binom{50}{2k}+\sum_{k=0}^{50}\binom{50}{2k+1}=2\sum_{k=0}^{50}\binom{50}{2k+1}\Rightarrow\sum_{k=0}^{50}\binom{50}{2k+1}=2^{50}/2=2^{49}$$

2.(a) De quantas maneiras podemos distribuir 4 bolas distintas por 4 caixas iguais podendo deixar caixas vazias?

$$Bell(4)=S_{4,1}+S_{4,2}+S_{4,3}+S_{4,4}=1+2^3-1+\binom{4}{2}+1$$

$S_{r,k}$ é o número de maneiras de distribuir r bolas distintas por k caixas iguais sem deixar caixas vazias.

(b) Quantas factorizações possui 210 em inteiros >1 não se distinguindo as factorizações que diferem apenas na ordem?

$$210=7\times 5\times 3\times 2$$

$$Bell(4)$$

(c) Dê uma explicação para a igualdade $\sum_{\substack{a_1+\cdots+a_n=r\\ a_1>0,\ldots,a_n>0}}\binom{r}{a_1,a_2,\ldots,a_n}=n!S_{r,n}$.

Ambos os lados da igualdade contam o número de funções de sobrejectivas de um conjunto R de r elementos para unm conjunto N de n elementos.
O lado esquerdo conta com respeito ao cardinal $a_i>0$ da pre-imagem de cada elemento i de $N=\{1,\ldots,n\}$: $\binom{r}{a_1,a_2,\ldots,a_n}$ $a_1>0,\ldots,a_n>0$ é o número de funções sobrejectivas de R para N onde os cardinais das pre-imagens dos elentos N são dados pela entradas da sequência $(a_1>0,\ldots,a_n>0)$.
O lado direito diz que número de funções sobrejectivas de R para N é igual a $n!S_r,n$ que é o número de maneiras de distribuir r bolas distintas por k caixas iguais sem deixar caixas vazias tal que após cada distribuição das bolas nas k caixas estas são permutadas de todas as maneiras possíveis.

3.(a) Sendo A_1,A_2,A_3,A_4 subconjuntos do conjunto finito X, escreva uma fórmula para

$$|X\setminus\bigcup_{i=1}^{4}A_i|.$$

$$
\begin{aligned}
|X \setminus \bigcup_{i=1}^{4} A_i| = |X| - (&|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| \\
&- |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_4| - |A_3 \cap A_4| \\
&+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\
&- |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|).
\end{aligned}
$$

Note que o número de parcelas que envolvem a interseção de i conjuntos é igual a $\binom{4}{i}$, $i = 1, 2, 3, 4$.

(b) Quantas soluções em inteiros não negativos da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 26$ onde $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 5$, e $x_3 \geq 6$ existem?

Comecemos por colocar 5 bolas na caixa 2 e 6 bolas caixa 3. Ficamos com 15 bolsa para serem distribuidas pelas 3 caixas cujo número é igual ao número de soluções em inteiros não negativos da equação da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 15$. *Ou seja*

$$\binom{15+2}{2}.$$

O número de soluções em inteiros não negativos da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 26$ *onde* $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 5$, *e* $x_3 \geq 6$ *é igual soluções em inteiros não negativos da equação* $x_1 + x_2 + x_3 = 15$ *onde* $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, *e* $x_3 \geq 0$.

(c) Determine o número de soluções em inteiras não negativos da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ onde $0 \leq x_1 \leq 4$, $0 \leq x_2 \leq 4$, e $0 \leq x_3 \leq 5$.

Use o princípio da inclusão-exclusão.

4.(a) Quantas partições auto conjugadas de 10 existem? Indique-as.
Ver a resolução da frequência do ano lectivo anterior.

(b) Quantas partições auto conjugadas de 69 existem com a parte maior igual a 30? Indique-as.

Os comprimentos da primeira linha e da primeira coluna do diagram de Ferrers de 69 são iguais a 30. Sobram $69 = -30 - 29 = 10$ *caixas no diagrama de Ferrers que formam uma partição auto-conjugada de* 10 *e que pela alínea anterior são duas* 52111 *e* 4321.
Então as partições pedidas são duas: $(30, 6, 3, 2, 2, 2, \underbrace{1, \ldots 1}_{24})$ *e* $(30, 5, 4, 3, 2, \underbrace{1, \ldots 1}_{24})$.

Sabendo que existem 34 partições de 69 em duas partes, quantas partições de 69 existem com a parte maior igual a 2?

por conjugação é fácil de concluir que O número de partições de 69 em duas partes é igual ao número de partições de 69 em que a parte maior é 2. Logo o número partições de 69 com a parte maior igual a 2 é tamabém 34.

(c) Sabendo que existem 34 partições de 69 em duas partes, quantas partições de 69 existem com a parte maior igual a 2?

por conjugação é fácil de concluir que O número de partições de 69 em duas partes é igual ao número de partições de 69 em que a parte maior é 2. Logo o número partições de 69 com a parte maior igual a 2 é tamabém 34.

Cotação:

1)0.5, 0.25, 0.75, 0.75, 0.75, 0.5.

2)0.75, 0.5, 0.75.

3)0.75, 0.75, 1.0.

4)0.75, 0.75, 0.5.

Relações de recorrência:

$S_{r,k} = S_{r-1,k-1} + kS_{r-1,k},\ r \geq 1.$

$p(r,n) = p(r-1, n-1) + p(r-n, n),\ r > n > 1.$

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Matemática Discreta – Exame de recurso

Ano letivo: 2023/23 — 28 de junho de 2023

Duração: 2h30m

Observação: Justifica **sucintamente** as tuas afirmações.

Parte II

1.(a) Seja n um inteiro não negativo. Dá uma definição enumerativa do número $\binom{n}{3}$.

$\binom{n}{3}$ é o número de subconjuntos com três elementos que podemos formar num conjunto de n elementos.

(b) Quantas palavras de comprimento 91, no alfabeto $\{1, +\}$, existem com exactamente 3, +'s, e 88, 1's?

Basta contar o número de maneiras de escolher 3 posições de entre 91 posições para colocar 3 +'s . As restantes posições disponíveis $91 - 3 = 88$ serão para colocar 88, 1's. Existem $\binom{91}{3} = \binom{91}{88} = \binom{91}{3,\ 88}$ palavras nas condições pedidas.

(c) Quantos rectângulos podes formar numa grelha 70×70?

Uma grelha 70×70 é formada por 71 segmentos horizontais e 71 segmentos verticais. Para formar um rectângulo nesta grelha temos de escolher dois segmentos horizontais de entre 71, e dois segmentos verticais de entre 71. No total temos
$\binom{71}{2}\binom{71}{2} = \left(\frac{70 \times 71}{2}\right)^2 = (1 + 2 + \cdots + 70)^2.$
Veja também a resolução na aula do exercício 27 da folha1md22 de problemas.

(d) Usa o princípio de contar de duas maneiras para mostrar a igualdade

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

Veja os slides da aula 6.

2.(a) Determina o número de soluções em inteiros da equação $x_1+x_2+x_3+x_4 = 99$ onde $x_1 \geq 4$, $x_2 \geq 1$, $x_3 \geq 1$ e $x_4 \geq 5$.

Veja a resolução do exercício 3(b) da segunda frequência.

(b) Determina o número de composições de 94 em quatro partes.

Uma composição de 94 em quatro partes é um vector $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{Z}_+^4$ tal que $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 94$. Contar o número de tais composições é o mesmo que contar o número de soluções em inteiros da equação linear $x_1 + \cdots + x_4 = 94$ sujeita a $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 1$. Ou seja, contar o número de soluções em inteiros positivos da equação linear $x_1 + \cdots + x_4 = 94$. Temos $\binom{94-4+3}{3} = \binom{94-1}{4-1}$ composições de 94 em quatro partes.

3.(a) Quantas funções existem de $R = \{1, 2, \ldots, 7\}$ para $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ sabendo que 1 é a imagem de 2 elementos, e 2, 3, 4 são cada um imagem de apenas um elemento?

$$\binom{7}{2,\ 1,\ 1,1,\ 2,0} + \binom{7}{2,1,1,1,0,\ 2} + \binom{7}{2,1,\ 1,1,1,\ 1}$$

(b) Quantas funções sobrejectivas existem de $R = \{1, 2, \ldots, 7\}$ para $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$?

$$6!S_{7,6} = 6!\binom{7}{2} = 6!\sum_{i=1}^{6} i.$$

(c) Verifica se a igualdade abaixo é verdadeira

$$\sum_{\substack{(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6) \\ \text{composição de 7} \\ \text{em 6 partes}}} \binom{7}{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6} = 6!\sum_{i=1}^{6} i.$$

É verdadeira porque ambos os lados da igualdade contam o número de funções sobrejectivas de $R = \{1, 2, \ldots, 7\}$ para $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Para a explicação do lado esquerdo da igualdade veja a resolução da frequência, exercício 2(c).

4.(a) Quantas partições auto-conjugadas de 9 existem? Indica-as.

Existem duas porque 9 escreve-se de duas maneiras como soma de ímpares dois a dois distintos: $9 = 9$ e $9 = 5+3+1$. Então $(5, 1, 1, 1, 1)$ e $(3, 3, 3)$ são

as duas partições auto-conjugadas de 9.
Ver a resolução da frequência do ano lectivo anterior.

(b) Quantas partições auto-conjugadas de 53 existem com as duas parte maiores iguais a 18 e 6 respectivamente ? Indica-as.

Os comprimentos da primeira linha e da primeira coluna do diagrama de Ferrers da partição auto-conjugada de 58 pedida são iguais a 18. Se agora apagarmos neste diagrama de Ferrers a primeira linha e a primeira coluna, no diagrama de Ferrers restante os comprimentos da primeira linha e da primeira coluna são iguais a 5. Sobram $53-18-17-5-4 = 53-44 = 9$ caixas no diagrama de Ferrers pedido. Pela alínea anterior $(3, 3, 3)$ é uma partição auto-conjugada de 9 a qual podemos encaixar no diagrama de Ferrers de 44 caixas com as duas partes maiores iguais a 18 e 6 mas a outra partição $(5, 1, 1, 1, 1)$ não conseguimos encaixar. Assim temos apenas uma partição auto-conjugada $(18, 6, 5, 5, 5, 2, \underbrace{1, 1, \cdots, 1}_{12})$ nas condições pedidas.

(c) Indica uma bijecção entre o conjunto das partições de 5000 em 177 partes e o conjunto das partições de 5000 com a parte maior igual a 177.
Veja os slides da aula 15.

Cotação:
5) 0,75+0,75+0,75+0,75
6)1+1
7)1+1+0.5
8) 1+1+0.5
Relações de recorrência:

$S_{r,k} = S_{r-1,k-1} + kS_{r-1,k},\ r \geq 1.$

$p(r, n) = p(r-1, n-1) + p(r-n, n),\ r > n > 1.$