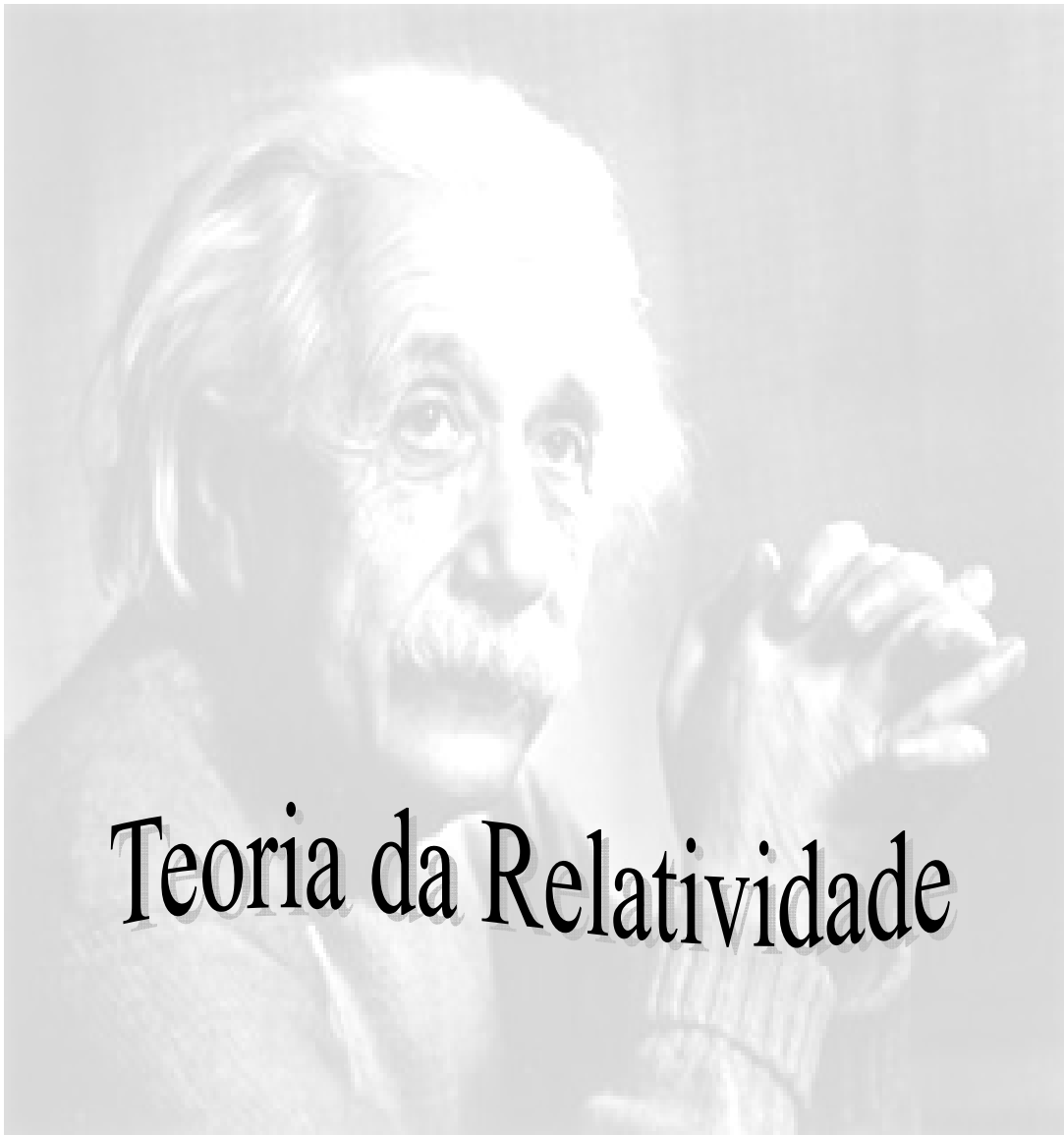


FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

APLICAÇÕES DA MATEMÁTICA



Trabalho realizado por:

- Isabel Maria Luís Marques
- Sónia Maurício Ferreira Silva

ÍNDICE

I. Introdução	3
II. Transformações de Lorentz	4
Dilatação dos Tempos	7
III. Paradoxo dos Gémeos	9
IV. A Teoria da Relatividade em Portugal	11
V. Conclusão	14
VI. Bibliografia	15

I. Introdução

Numa conferência em 1900, com o propósito de fazer o balanço de um século de investigação e intitulada "*Nineteenth century clouds over the dynamical theory of heat and light*", Lord Kelvin apontou para um problema, uma nuvem que toldava o panorama da Física. Nuvem essa que se viria a revelar como a origem de uma fortíssima tempestade que abalaria toda a Física do século XIX, a **Teoria da Relatividade** (TR), dando origem à grande revolução científica que se inicia no dealbar do século XX. Uma revolução cujas repercussões se fizeram sentir em todos os domínios do pensamento e que marca de um modo indelével a investigação científica e tecnológica deste século.

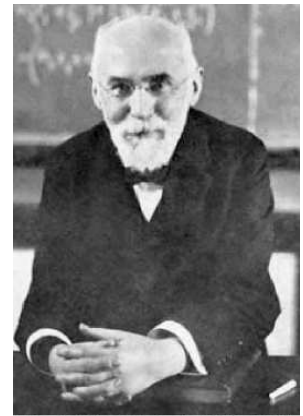
O alemão Albert Einstein (1879-1955) passou a representar um ponto de inflexão na ciência moderna com a publicação da Teoria da Relatividade Restrita, em 1905, na reconhecida revista científica *Annalen der Physik*. Como uma generalização da Relatividade Restrita concebeu uma teoria geométrica de gravitação cuja versão final foi publicada em 1916 e ficou conhecida como Teoria Geral da Relatividade.

Tal como noutros países da Europa, também em Portugal a comunidade dos matemáticos desempenhou um papel importante na recepção da teoria da relatividade. E, embora os matemáticos tenham participado nas discussões teóricas até aos anos 30, não pode ser ignorada a importância da comunidade dos astrónomos na apropriação da relatividade.

Com este trabalho é nossa intenção dar uma visão panorâmica, muito breve, não de toda a teoria da relatividade restrita mas apenas de alguns tópicos relacionados com esta tão importante teoria. Pretendemos, ainda, estudar numa perspectiva histórica a introdução e influência desta teoria em Portugal, levando a cabo um estudo de História da Ciência, enquanto área integradora dos efeitos sociais, políticos, culturais e científicos, que permitam a compreensão da assimilação das ideias revolucionárias da Física Moderna por diferentes grupos da sociedade portuguesa: professores, estudantes, intelectuais.

II. Transformações de Lorentz

No fim do século XIX, quando ainda se admitia o espaço vazio de matéria e cheio com "éter", houve muita discussão para se saber como os corpos se moviam através desse éter e como esse movimento afectaria a velocidade da luz medida em relação à Terra. No início, os físicos admitiram que as vibrações desse éter hipotético estavam relacionadas com a luz, do mesmo modo que as vibrações do ar estavam relacionadas com o som. Supondo o éter estacionário, encontrou-se para a velocidade da luz relativa ao éter o valor $c = 2,9979 \times 10^8$ m/s.



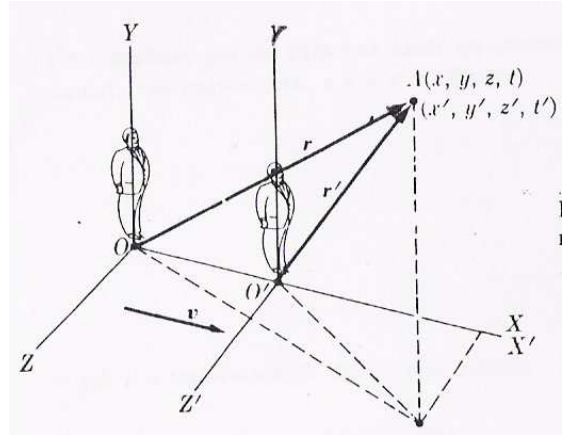
Hendrik Antoon Lorentz (1853 - 1928)

Se a Terra se movesse através do éter sem perturbá-lo, então a velocidade da luz relativa à Terra deveria depender da direcção de propagação da luz. Por exemplo, seria $c - v$ para um raio de luz propagando-se na mesma direcção do movimento da Terra e $c + v$ para uma propagação em sentido oposto. Entretanto se a trajectória da luz observada da Terra fosse perpendicular ao movimento terrestre, a sua velocidade relativa à Terra seria $\sqrt{c^2 - v^2}$.

Em 1881, os físicos americanos Michelson e Morley iniciaram uma série memorável de experimentos para medir a velocidade da luz em diferentes direcções relativas à Terra. Com grande surpresa eles verificaram que a velocidade da luz era a mesma em todas as direcções. Contudo a transformação de Galileu indica que nenhum corpo pode ter a mesma velocidade relativa a dois observadores em movimento uniforme relativo e que a velocidade relativa depende da direcção do movimento do observador. Outra explicação seria dizer que a Terra arrasta o éter com ela, assim como ela arrasta a atmosfera; desse modo, próximo à superfície, o éter estaria em repouso relativo à Terra. Essa explicação é um tanto improvável, visto que o arrasto do éter se deveria manifestar em outros fenómenos relacionados com a propagação da luz. Tais fenómenos jamais foram observados. Por estas razões a ideia de um éter foi abandonada pelos físicos.

O enigma de Michelson e Morley foi resolvido em 1905, quando Einstein enunciou o seu princípio da Relatividade. Einstein admitiu a velocidade da luz como um invariante físico, tendo o mesmo valor para todos os observadores. Essa exigência decorre da aplicação do princípio da relatividade ao electromagnetismo. Admitida essa hipótese, a transformação de Galileu não pode ser correcta. Como a velocidade é a distância dividida pelo tempo, pode

ser que tenhamos de ajustar o tempo bem como a distância para que o quociente dos dois permaneça com o mesmo valor para observadores em movimento relativo, como acontece no caso da velocidade da luz. Por outras palavras, o intervalo de tempo entre dois acontecimentos não é o mesmo para dois observadores em movimento relativo. Assim, devemos substituir a transformação de Galileu por outra, de modo que a velocidade da luz seja invariante. Vamos admitir que os observadores O e O' estejam em movimento com velocidade relativa v , que os eixos X e X' estejam dirigidos ao longo do movimento relativo dos dois observadores, e que os eixos YZ e $Y'Z'$ permanecem respectivamente paralelos.



Também podemos admitir que ambos os observadores acertam os seus relógios de modo que, quando eles estiverem em coincidência, $t = t' = 0$.

Suponhamos que, no instante $t = 0$, um clarão luminoso é emitido a partir da posição comum aos dois observadores. Decorrido o intervalo de tempo t , o observador O notará que a luz alcançou o ponto A e escreverá $r = ct$, onde c é a velocidade da luz. Como $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ então $(ct)^2 = x^2 + y^2 + z^2$. (1)

De modo semelhante, o observador O' notará que a luz atingiu o mesmo ponto A decorrido o intervalo de tempo t' , mas também com velocidade c . Portanto $r' = ct'$, e $(ct')^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$. (2)

Pretendemos obter uma transformação que relacione as equações (1) e (2). A simetria do problema sugere que $y' = y$ e $z' = z$. Como para o observador O , $OO' = vt$, tem-se $x = vt$ para $x' = 0$ (ponto O'). Isto sugere a relação $x' = k(x - vt)$, sendo k uma constante a determinar. Podemos também admitir que $t' = a(t - bx)$, onde a e b são constantes a serem determinadas (para a transformação de Galileu $k = a = 1$ e $b = 0$).

Fazendo todas estas substituições na equação (2), temos

$$\begin{aligned} k^2(x^2 - 2xvt + v^2t^2) + y^2 + z^2 &= c^2a^2(t^2 - 2tbx + b^2x^2) \\ \Leftrightarrow k^2x^2 - c^2a^2b^2x^2 + 2c^2a^2tbx - 2k^2xvt + y^2 + z^2 &= c^2a^2t^2 - k^2v^2t^2 \\ \Leftrightarrow (k^2 - c^2a^2b^2)x^2 + 2(c^2a^2b - k^2v)xt + y^2 + z^2 &= c^2t^2\left(a^2 - \frac{k^2v^2}{c^2}\right) \end{aligned}$$

Como esta equação deve ser idêntica à equação (1) vem

$$\begin{cases} k^2 - c^2 a^2 b^2 = 1 \\ c^2 a^2 b - k^2 v = 0 \\ a^2 - \frac{k^2 v^2}{c^2} = 1 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema de equações, temos

$$k = a = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \text{ e } b = \frac{v}{c^2}$$

A nova transformação, compatível com a invariância da velocidade da luz, é então

$$\begin{cases} x' = k(x - vt) = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = k(t - bx) = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

Este conjunto de relações é chamado *transformação de Lorentz* por ter sido o físico holandês Hendrik Lorentz o primeiro a obtê-lo, por volta de 1890, em conexão com o problema do campo electromagnético de uma carga em movimento.

Notando-se que c é uma velocidade muito grande comparada com a maioria das velocidades normalmente encontradas na Terra tem-se que a razão v/c é muito pequena, os termos $\frac{v^2}{c^2}$ e $\frac{vx}{c^2}$ são, em geral, desprezíveis e k é praticamente igual a 1.

Embora os resultados numéricos da transformação de Lorentz, na maioria dos casos, não difiram muito dos resultados da transformação de Galileu, sob o ponto de vista teórico, a transformação de Lorentz, também chamada transformação relativística, representa uma mudança conceptual muito profunda, especialmente com relação ao espaço e ao tempo.

Consequências da Transformação de Lorentz

O factor de escala $k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ sugere que os comprimentos dos corpos nos

intervalos de tempo entre dados eventos medidos por observadores em movimento relativo

possam ser diferentes.

Dilatação dos Tempos

Um intervalo de tempo pode ser definido como o tempo decorrido entre dois eventos medido por um observador. Um evento é uma ocorrência específica que acontece num dado ponto do espaço num certo instante. Assim, em termos destas definições, quando a bola de um pêndulo alcança a sua posição mais alta durante a oscilação, constitui um evento. Depois de um certo período de tempo, a bola voltará à mesma posição; isto é o segundo evento. O tempo decorrido entre esses dois eventos é então um intervalo de tempo. Assim, um intervalo de tempo é o tempo que se leva para se fazer alguma coisa: para um pêndulo oscilar, para um electrão girar em torno de um núcleo, para uma partícula radioactiva sofrer uma desintegração, para um coração bater, etc.

Consideremos dois eventos ocorrendo no mesmo local x' relativo a um observador O' . O intervalo de tempo entre esses dois eventos é $T' = t'_b - t'_a$. Para o observador O , em relação ao qual O' se move com velocidade constante v no sentido positivo do eixo X , o intervalo de tempo é $T = t_b - t_a$. Para encontrar a relação entre os instantes de ocorrência dos dois eventos, registados por ambos os observadores, utilizamos a transformação de Lorentz.

Assim,

$$t' = k(t - vx) \Leftrightarrow t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Então,

$$t_a = \frac{t'_a + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{e} \quad t_b = \frac{t'_b + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Note-se que o x' é o mesmo em ambas as expressões. Portanto, subtraindo t_a de t_b , vem

$$t_b - t_a = \frac{t'_b - t'_a}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{ou seja,} \quad T = \frac{T'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

onde T' é o intervalo de tempo medido por um observador O' em repouso relativo ao ponto onde os eventos ocorreram, e T é o intervalo de tempo medido por um observador O em relação ao qual o ponto está em movimento quando da ocorrência dos eventos. Isto é, para o observador O os dois eventos ocorrem em duas posições diferentes no espaço.

Visto que o factor $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ é maior do que 1 tem-se $T > T'$.

Assim, quando os processos ocorrem num corpo em movimento relativo ao observador eles parecem ter uma duração maior do que quando eles ocorrem num corpo em repouso relativo ao observador.

Isto é,

$$T_{\text{movimento}} > T_{\text{repouso}}$$

III. Paradoxo dos Gémeos

O paradoxo dos gémeos é um problema de relatividade geral que intriga os cientistas e as pessoas comuns pois obriga-nos a ver o espaço e o tempo de uma forma diferente da qual fomos acostumados a vê-los. Vamos supor que existem dois gémeos idênticos Paulo e Pedro, e que ao completarem 20 anos, o Paulo viaja para um planeta X que dista 10 anos-luz da Terra. Inicialmente vamos definir o que é um ano-luz. Diferentemente do que se acha, o ano-luz não é uma unidade de tempo, mas sim uma unidade de espaço, e é equivalente à distância percorrida pela luz no intervalo de tempo de um ano. Desta forma, vemos que para alcançar o planeta X, tem que viajar numa nave espacial à velocidade da luz durante 10 anos. Vamos considerar agora um referencial inercial R em que ambos os planetas Terra e o planeta X estejam em repouso e separados pela distância L_0 . Temos também os referenciais R' e R'', que representam respectivamente o referencial do Paulo durante a sua viagem de ida para X e a viagem de volta para a Terra.

Vamos supor que a aceleração do Paulo é muito grande e que adquire uma velocidade v , próxima à velocidade da luz, muito rapidamente e viaja durante dez anos para o planeta X. Ao chegar ao planeta X, decide rapidamente voltar para a Terra e novamente adquire uma velocidade v agora em direcção à Terra. Considerando que $v = 0,8c$, temos $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{3}{5}$. Considerando o referencial do Pedro, o Paulo viajou durante 10 anos-luz/ $0,8c = 12,5$ anos, e como a viagem de volta também levou 12,5, o Pedro estará 25 anos mais velho.

No entanto, no referencial do Paulo o espaço está contraído e o tempo dilatado, logo o tempo de viagem no referencial do Paulo é $\Delta t_0 = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{3}{5} \times 12,5 = 7,5$. Portanto, o Paulo estará apenas 15 anos mais velho. Temos então uma diferença de 10 anos entre os dois irmãos gémeos.

O paradoxo aparece quando nos perguntamos: Se considerarmos que o Paulo está no referencial em repouso, ele percebe que o Pedro se move à velocidade da luz, então porque é que o Pedro não está mais jovem? O problema está no entendimento do processo que ocorre durante a aceleração do Paulo na saída da Terra, na chegada ao planeta X, na saída de X e na chegada à Terra. Vamos imaginar que um relógio no planeta X esteja sincronizado com o relógio de Pedro. Isto significa que no meio do caminho entre os dois planetas, um observador vê a mesma hora no planeta X e na Terra. No referencial do Paulo no entanto, a

assincronia destes relógios é dada por uma diferença igual a L_0v/c^2 . No instante em que o Paulo se aproxima do planeta X, ele percebe que o relógio de X está adiantado $10 \times 0,8c/c^2 = 8$ anos. No instante em que o Paulo pára no planeta X para mudar a sua direcção, ele está no referencial R, onde os relógios estão sincronizados. Neste instante, o relógio do Pedro adiantou 8 anos, dando a impressão a Paulo que seu irmão envelheceu 8 anos.

Considerando os mesmos factores para a volta, teremos um envelhecimento total de 25 anos. Apesar de este experimento não poder ser realizado devido a impossibilidade de alcançarmos uma velocidade próxima à da luz, partículas cósmicas como os múons (reproduzem este efeito quando apresentam um tempo de vida maior do que o esperado, quando se movem com velocidades muito grandes. Nestes casos, o tempo de vida da partícula é o mesmo, porém o tempo e o espaço estão deformados, e portanto no nosso referencial, medimos tempos de vida maiores para estas partículas. Efeitos similares são obtidos em grandes aceleradores de partículas em grandes centros de pesquisa.

IV. A Teoria da Relatividade em Portugal

Também em Portugal, no primeiro quarto do século XX, a Teoria da Relatividade não passou despercebida e foi objecto de referência e de alguma reflexão em revistas de índole cultural e científica, em relatórios académicos e cursos universitários. É através dos matemáticos, sobretudo, os ligados à Física Matemática, Astronomia e Geodesia, que se estabelecem os primeiros contactos com esta teoria.

Em 1912, Leonardo Coimbra (1883-1935), filósofo e licenciado em Matemática, nascido em Felgueiras, começou a falar da teoria da relatividade restrita em Portugal, sete anos depois de ela ter sido proposta por Einstein. Apresentou uma dissertação intitulada *O Criacionismo. Esboço de um Sistema Filosófico*, onde discute as doutrinas físicas do começo do século, em particular, a teoria dos electrões de Lorentz e a teoria da relatividade restrita de Einstein. Mais tarde, em 1922, disserta sobre a relatividade restrita e a teoria da relatividade geral, recém-formulada em 1916, na sua obra *Razão Experimental*.

Entre 1922 e 1923, foi ministrado, no ensino universitário português, o primeiro curso de relatividade, restrita e geral, na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, pelo professor António dos Santos Lucas (1866-1939).

Nos anos 20, Almeida Lima (1859-1930), professor de Física da Faculdade de Ciências de Lisboa, publicou artigos expondo as suas posições anti-relativistas.

Ainda nos anos 20, o Almirante Gago Coutinho publicou na revista *O Instituto* uma série de artigos expondo a sua visão anti-relativista, não tendo motivado reacções. O mesmo não se passou com os seus escritos na revista *Seara Nova*, nos anos 30, os quais provocaram a intervenção de Manuel dos Reis e de Ruy Luís Gomes.

Em 1925, Einstein visitou Portugal a caminho e na volta da América do Sul.

Nos anos 30, geraram-se algumas polémicas e reacções entre anti-relativistas e relativistas, sobretudo entre o Almirante Gago Coutinho e os relativistas Manuel dos Reis e Ruy Luís Gomes.

Francisco da Costa Lobo assumiu um papel de antagonista das novas teorias (relatividade e quântica). Para explicar os fenómenos físicos do Universo propôs a “*teoria radiante*”. Sobre o tema, proferiu uma conferência na série organizada pelo físico Mário Silva (1901-1977) em Coimbra no ano lectivo de 1930-1931 e publicou na Revista da Faculdade de Ciências da Universidade de Coimbra (Vol II, 1931-1932). Nessa mesma

revista e volume, tomaram posição os professores da 2.^a Secção da sua Faculdade (Física e Química), Pinto Basto (1881-1937) e Mário Silva, criticando as posições de Costa Lobo.

Os licenciados e doutorados em Matemática pela Universidade de Coimbra, Mira Fernandes (1884-1958), Ruy Luís Gomes e Manuel dos Reis (1900-1992) são, entre outros, os cultores da relatividade em Portugal, distinguindo-se pelos inúmeros artigos escritos e conferências realizadas.

Em 1930, Manuel dos Reis fez a apresentação mais completa da relatividade restrita e geral, escrita para as provas para professor catedrático na Universidade de Coimbra. Intitulado *O problema da gravitação universal*, o texto descreve a história das teorias da gravitação de Newton a Einstein, e incorpora as novas ideias no contexto da física, contribuindo para facilitar a apropriação da relatividade pela comunidade nascente dos físicos. Contudo, não desenvolveu o hábito de submeter para publicação em revistas internacionais os resultados do seu trabalho de investigação, dando seguimento a uma tradição de isolamento com consequências nefastas para o progresso da ciência portuguesa.

Em 1932, Einstein foi nomeado sócio da Academia de Ciências de Lisboa, no ano em que fuge da Alemanha para se refugiar nos Estados Unidos, de onde trocou correspondência científica com o físico português, António Gião, que vivia em Reguengos de Monsaraz.

Em Junho de 1933, numa conferência, intitulada “*Galileo Galilei, Valor científico e valor moral da sua obra*”, publicada na revista *Seara Nova*, Bento de Jesus Caraça (1901-1948) divulgou as teorias relativistas em Portugal.

Ruy Luís Gomes escreveu diversos textos de interpretação e divulgação da relatividade, dos quais *A Teoria da Relatividade Restrita* é exemplo. Desenvolveu investigação nesta área e realizou trabalhos no âmbito da relatividade geral, por exemplo, sobre os conceitos de espaço e tempo absolutos para determinadas métricas cosmológicas. Em 1954, publicou a obra *Teoria da Relatividade – Espaço, Tempo, Gravitação*. Dos seus artigos técnicos sobre relatividade restrita dados a conhecer em revistas internacionais da especialidade, salienta-se o publicado em 1935, nos *Rendiconti della Accademia dei Lincei* e outro no *Journal de Physique et le Radium*, em 1938. Além disso, manteve correspondência com Levi-Civita, bem como com Mira Fernandes, tendo a sua obra merecido referência de grandes vultos da época, entre outros o prémio Nobel da Física Louis de Broglie e o célebre matemático John von Neumann. Pelo que, os seus trabalhos contribuíram para o avanço da física-matemática, uma das áreas por si desenvolvidas a par da análise.

No ano de 1938, Ruy Luís Gomes fez a análise de quatro artigos, publicados na revista *Seara Nova* por Gago Coutinho, sob o título “*Mecânica Clássica e Mecânica Relativista*” e subtítulo “*Dedicado aos Alunos de Física Liceal*”, cuja formação daria “bases mais do que suficientes para se poder comparar a Realidade com os interessantes paradoxos da Relatividade Restrita”. As reflexões de Ruy Luís Gomes, dispersas por vários números desta revista, foram posteriormente compilados com título “*A relatividade. Origem, evolução e tendências actuais*”.

O evidente auge da vida científica portuguesa nas décadas de 30 e 40 prometia mudanças na Universidade e na ciência em Portugal, finalizando um período de letargia verificado no século XIX. Contudo, para além de algum isolamento ainda existente, os motivos políticos relativos ao regime político da época marcaram os finais da década de 40, provocando o afastamento do ensino de muitos cientistas, nomeadamente do campo das ciências exactas. Alguns, viram-se obrigados a procurar exílio no estrangeiro, por exemplo António Monteiro, Pereira Gomes, Ruy Luís Gomes, desenvolvendo as suas investigações em universidades estrangeiras. Outros, como Neves Real, Bento Caraça, Laureano de Barros,... viram interrompidas as suas carreiras. Pelas razões expostas foi interrompida a tentativa de organização da investigação científica, acentuando-se o atraso da ciência em Portugal, recomeçando uma aproximação à Europa, ainda que de modo lento na década de 60.

Recentemente, o livro “Einstein entre nós: a recepção de Einstein em Portugal de 1905 a 1955”, coordenado pelo físico Carlos Fiolhais e lançado em 17 de Outubro de 2005, inclui vários trabalhos sobre Albert Einstein e a sua obra, da autoria de vários especialistas nacionais de história da ciência. Além disso, contém um catálogo dos livros e artigos publicados até 1955 em revistas científicas e culturais, jornais, etc., em Portugal ou no estrangeiro, sobre Einstein e a sua obra. Reflectindo alguma polémica que houve a nível nacional entre 1905 e 1955 sobre a relatividade.

V. Conclusão

Ao realizar este trabalho apercebemo-nos da imensidão desta teoria. Todos sabem que Einstein fez algo de espantoso quando descobriu a Teoria da Relatividade, mas poucos sabem exactamente em que consiste essa teoria e quais as suas consequências. Einstein revolucionou a concepção tradicional do mundo físico, mas as suas ideias estão envoltas em tecnicidades matemáticas.

A teoria da relatividade é uma teoria construída não só na interface da física, mas também na matemática e na astronomia, pelo que se verificaram reacções e apropriações, de modos variados, por parte dos membros destas três culturas científicas.

Em Portugal, como em outros países, as reacções à teoria da relatividade variaram da adesão à resistência, qualquer uma destas envolvendo progressões no espaço e no tempo dependentes do perfil das personalidades envolvidas e das comunidades a que estas pertenciam.

No final deste trabalho, e parafraseando Bertrand Russel, chegámos à conclusão, *“que sabemos extremamente pouco, embora seja surpreendente que conheçamos tanto, e ainda mais surpreendente que tão pouco conhecimento nos consiga proporcionar tamanho poder”*.

VI. Bibliografia

Livros:

- Bertrand Russel, *ABC da Relatividade*;
- *Apontamentos da disciplina de Mestrado – Aplicações da Matemática*, Ano lectivo 2005/2006, professora Natália Bebiano;
- Rindler, W. *Introduction to Special Relativity*, Oxford University Press, Oxford
- Ramayana Gazzinelli, *Teoria da Relatividade Especial*;
- Paulo Crawford, Centro de Astronomia e Astrofísica da Universidade de Lisboa, Campo Grande, Ed. C8; 1749-016 Lisboa, Portugal, Julho de 2004, Diagramas do Espaço-tempo;
- Elsa Mota, Ana Simões e Paulo Crawford, *Einstein em Portugal: o primeiro teste da teoria da relatividade geral e o seu impacto na comunidade científica nacional*, Universidade de Lisboa, Faculdade de Ciências, CHCUL e CAAUL;
- Ferreira, Ricardo e Coelho, Hélio Teixeira. “*Annus Mirabilis de Einstein: artigos que revolucionaram a Física*”, *Gazeta de Matemática*, nº150, 2006-07-26;
- Alonso, Marcelo e Finn, Edward J. “*Física Um Curso Universitário*” - Vol. 1, Editora Edgard Blucher, 1972, capítulo 6;
- Fiolhais, Carlos, e outros. “*Física*”, Didáctica Editora, 2001, capítulo 1.6;
- Fiolhais, C.; Valadares, J.; Silva, L.; Teodoro, V. D. *Física 12º ano*, Lisboa Didáctica, 1996, páginas 73-78.

Sites da Internet:

- <http://www.cienciahoje.pt/index.php?oid=1389&op=all>
- http://www.if.ufrgs.br/~betz/space_time/gemtextfr.html
- <http://www.deducoeslogicas.com/relatividade/paradoxo2.html>
- <http://www.ecientificocultural.com/ECC2/Dialogos/trigemeos.htm#47316>
- http://www.conviteafisica.com.br/home_fisica/perguntas_leitores/respostas/fisica/pergunta_10.htm
- <http://new.cienciaviva.pt/rede/space/resposta5.asp>
- <http://cmup.fc.up.pt/cmup/relatividade/RR/index.htm>