Duração: 2h30m **Exame de Recurso** 06/07/2023

Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos

1. Considere o anel $A = (\mathbb{Z}_8, +_8, \times_8)$. Determine:
   (a) Os elementos -2 e 5^{-1} em A.
   (b) Os elementos invertíveis e os divisores de zero de A.
   (c) Os divisores de zero do *anel produto* $A \times A = \{(a, b) \mid a, b \in A\}$
   (as operações em $A \times A$ são $(a, b) + (c, d) = (a +_8 c, b +_8 d)$ e $(a, b) \cdot (c, d) = (a \times_8 c, b \times_8 d)$).
   (d) As soluções em $A \times A$ da equação $(2, 5) \cdot (x, y) = (4, 3)$.

2. Seja $A = (\mathbb{Q}, +, *)$, onde $+$ denota a adição usual de racionais e $*$ é definida por $a * b = ab/3$.
   (a) Mostre que A é um corpo.
   (b) Determine um subanel de A que seja isomorfo ao anel usual $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ dos inteiros, descrevendo o isomorfismo.

3. Determine:
   (a) A decomposição do polinómio $p(x) = x^4 - 2x^3 - 9x^2 - 3x + 3$ em factores irredutíveis sobre $\mathbb{Q}$.
   (b) O anel quociente $\mathbb{Z}_{11}[x]/\langle x^2+1\rangle$ (isto é, exiba o conjunto dos seus elementos e as operações do anel). Trata-se de um corpo?

4. Seja θ uma raíz do polinómio $x^3 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$.
   (a) Determine a extensão algébrica $\mathbb{Q}(\theta)$.
   (b) Escreva o elemento $(5\theta^2 - 10)(\theta + 1)^{-1}$ de $\mathbb{Q}(\theta)$ na forma genérica dos elementos de $\mathbb{Q}(\theta)$ determinada na alínea anterior.
   (c) Seja $\Phi \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\theta), \mathbb{Q})$. Supondo que $\Phi(\theta) = \alpha \in \mathbb{Q}(\theta)$, determine uma expressão para o valor de $\Phi(x)$, para qualquer $x \in \mathbb{Q}(\theta)$.

5. (a) Seja $h\colon A \to B$ um homomorfismo de corpos diferente do homomorfismo nulo. Mostre que h é injectivo e $h(1_A) = 1_B$.
   (b) Seja L uma extensão de um corpo K e seja $\theta \in L$ um elemento algébrico sobre K. Prove que
   $$K(\theta) = \{p(\theta)\colon p(x) \in K[x],\ gr(p(x)) < n\},$$
   sendo n o grau do polinómio mínimo de θ sobre K.