# 6. Hélices generalizadas

*Na secção anterior vimos que a curvatura e a torsão são os invariantes que procurávamos. A descrição de uma determinada família de curvas com propriedades geométricas comuns fica então completa com a obtenção de uma caracterização dessas curvas em termos da curvatura e torsão. Nesta secção ilustraremos isso com o estudo de uma classe especial de curvas — as hélices generalizadas.*

As hélices circulares $\gamma_{r,a}$ do Exemplo 3.3 têm uma característica especial: existe um vector unitário $u$ (neste caso, $u = (0,0,1)$) tal que o ângulo $\theta(s)$ formado pelos vectores $T(s)$ e $u$ é constante; com efeito,

$$\cos\theta(s) = (T(s)|u) = \Big((\ldots,\ldots,\frac{a}{\sqrt{r^2+a^2}})|(0,0,1)\Big) = \frac{a}{\sqrt{r^2+a^2}}$$

pelo que

$$\theta(s) = \arccos\frac{a}{\sqrt{r^2+a^2}}.$$

As curvas que satisfazem esta propriedade chamam-se hélices generalizadas. Portanto, uma curva $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ é uma *hélice generalizada* se existir um vector unitário $u$ tal que $(T(t)|u)$ não depende do parâmetro $t$. O vector $u$ diz-se o *eixo* da hélice.

**Exemplos.** (1) A hélice circular $\gamma_{r,a}$ é uma hélice generalizada de eixo $u = (0,0,1)$.

(2) Toda a curva plana é uma hélice generalizada. Com efeito, como o vector binormal $B(t) = B$ não depende de $t$, se considerarmos $u = B$ é evidente que a definição de hélice generalizada é satisfeita.

O resultado seguinte mostra que é muito fácil identificarmos uma hélice generalizada.

**Teorema 6.1.** *Seja $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva cuja curvatura nunca se anula. Então $\gamma$ é uma hélice generalizada se e só se a aplicação*

$$t \longmapsto \frac{\tau(t)}{\kappa(t)}$$

*é constante.*

**Demonstração:** (1) Em primeiro lugar, provemos o resultado para curvas parametrizadas por comprimento de arco.

"$\Rightarrow$" Seja $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ uma hélice generalizada, parametrizada por comprimento de arco. Consideremos o seu eixo $u$, que satisfaz a condição $(T(s)|u) = c$, para qualquer $s \in I$. Comecemos por referenciar esse vector na base formada pelo Triedro de Frenet-Serret:

$$u = \alpha_1(s)T(s) + \alpha_2(s)N(s) + \alpha_3(s)B(s)$$

onde

$$\alpha_1(s) = (u|T(s)), \alpha_2(s) = (u|N(s)) \text{ e } \alpha_3(s) = (u|B(s)).$$

Por hipótese $\alpha_1(s) = c$. Além disso, de $(u|T(s)) = c$ decorre, por derivação, $(u|N(s)) = 0$. Portanto $u = cT(s) + \alpha_3(s)B(s)$. Derivando obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= cT'(s) + \alpha_3'(s)B(s) + \alpha_3(s)B'(s) \\ &= c\kappa(s)N(s) + \alpha_3'(s)B(s) - \alpha_3(s)\tau(s)N(s) \\ &= (c\kappa(s) - \alpha_3(s)\tau(s))N(s) + \alpha_3'(s)B(s). \end{aligned}$$

Então $\alpha_3'(s) = 0$ para qualquer $s$, ou seja $\alpha_3(s) = \alpha$ (constante), e $c\kappa(s) - \alpha\tau(s) = 0$. Consequentemente

$$\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = \frac{c}{\alpha}$$

para qualquer $s \in I$, pois $\alpha \neq 0$ (se fosse $\alpha = 0$ teríamos, por um lado, $c\kappa(s) = 0$, ou seja, $c = 0$, e por outro lado $u = cT(s)$ logo $1 = \|u\| = c$, o que seria contraditório).

Note que, como $u = cT(s) + \alpha B(s)$ é unitário, $1 = c^2 + \alpha^2$, isto é, $\alpha = \pm\sqrt{1-c^2}$.

"$\Leftarrow$" Suponhamos agora que

$$\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = d$$

para qualquer $s \in I$ e consideremos $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{c}{\sqrt{1-c^2}} = d$$

(tal $c$ existe; basta considerar

$$c = \frac{d}{\sqrt{1+d^2}}$$

ou, equivalentemente, $c = \cos\theta$ onde $\mathrm{cotg}\theta = d$). Definindo, para cada $s \in I$,

$$s \mapsto u(s) = cT(s) + \sqrt{1-c^2}B(s),$$

esta função é constante, uma vez que

$$\begin{aligned} u'(s) &= cT'(s) + \sqrt{1-c^2}B'(s) \\ &= (c\kappa(s) - \tau(s)\sqrt{1-c^2})N(s) \\ &= (c\kappa(s) - d\kappa(s)\sqrt{1-c^2})N(s) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto $u(s) = u$ (constante). Como $\|u\| = \sqrt{c^2+1-c^2} = 1$ e $(T(s)|u) = c$, fica provado que $\gamma$ é uma hélice generalizada.

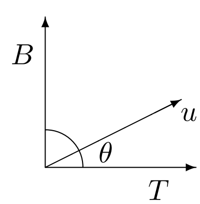
(2) Finalmente, para provar o resultado para uma curva genérica $\gamma$, basta reescrever o caso (1), tendo o cuidado de considerar a velocidade da curva nas fórmulas de Frenet-Serret. Alternativamente, podemos também argumentar do seguinte modo:

Seja $\tilde{\gamma} : J \to \mathbb{R}^3$ uma reparametrização por comprimento de arco de $\gamma$, sendo $\lambda : I \to J$ a respectiva mudança de parâmetro. Então:

$$
\begin{aligned}
\gamma \text{ é uma hélice generalizada} &\Leftrightarrow \exists u \in \mathbb{R}^3 : \|u\| = 1 \text{ e } (T_\gamma(t)|u) = c \text{ para qualquer } t \in I \\
&\Leftrightarrow \exists u \in \mathbb{R}^3 : \|u\| = 1 \text{ e } (T_{\tilde{\gamma}}(\lambda(t))|u) = c \text{ para qualquer } t \in I \\
&\Leftrightarrow \exists u \in \mathbb{R}^3 : \|u\| = 1 \text{ e } (T_{\tilde{\gamma}}(s)|u) = c \text{ para qualquer } s \in J \\
&\Leftrightarrow \tilde{\gamma} \text{ é uma hélice generalizada} \\
&\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{\tau_{\tilde{\gamma}}(s)}{\kappa_{\tilde{\gamma}}(s)} = d \text{ para qualquer } s \in J \\
&\Leftrightarrow \frac{\tau_\gamma(\lambda^{-1}(s))}{\kappa_\gamma(\lambda^{-1}(s))} = d \text{ para qualquer } s \in J \\
&\Leftrightarrow \frac{\tau_\gamma(t)}{\kappa_\gamma(t)} = d \text{ para qualquer } t \in I. \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Note que esta demonstração fornece-nos um método efectivo de cálculo do eixo da hélice, conhecida a constante $d = \frac{\tau(s)}{\kappa(s)}$:

- Determina-se o número $c = \frac{d}{\sqrt{1+d^2}}$; equivalentemente, $c = \cos\theta$ onde $\text{cotg}\theta = d$.
- O eixo $u$ é o vector
$$cT + \sqrt{1-c^2}B = \cos\theta T + \sin\theta B$$
(onde $T$ e $B$ são os vectores tangente e binormal calculados num mesmo $s$). Portanto o eixo da hélice é um vector unitário no plano rectificante que faz um ângulo
$$\theta = \text{arc cotg}\frac{\tau}{\kappa}$$
com $T$:




## Exercícios

6.1 Mostre que qualquer hélice circular é uma hélice generalizada.

6.2 Seja $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco tal que $\kappa_\beta > 0$ e seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ definida por $\alpha(t) = \beta'(t)$. Mostre que se $\beta$ é uma hélice generalizada então $\kappa_\alpha$ é constante.

6.3 Seja $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco cuja curvatura nunca se anula. Prove que as quatro condições seguintes são equivalentes:

(i) $\gamma$ é uma hélice generalizada;

(ii) os vectores normais principais são paralelos a um determinado plano fixo;

(iii) os vectores binormais fazem um ângulo constante com uma determinada direcção fixa;

(iv) $\dfrac{\tau}{\kappa}$ é constante.

6.4 Considere $a, b \in \mathbb{R}$. Mostre que a curva $\gamma_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por $\gamma_{a,b}(t) = (at, bt^2, t^3)$ é uma hélice generalizada se e só se $4b^4 = 9a^2$ ou $a = 0$ ou $b = 0$. Qual é o seu eixo nesse caso?