Ano lectivo 2005/06 **Exame de Geometria Diferencial**

Duração: 2h30m 21/7/06

Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos

1. Considere a curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ parametrizada por $\gamma(t) = (2t, \sqrt{3}\,t^2, t^3)$.

   (a) Determine o seu vector tangente. Qual é a velocidade de γ no instante t?

   (b) Sendo $t > 0$, designe por $s(t)$ o comprimento de γ no intervalo $[0, t]$. Quanto vale $s(t)$?

   (c) A curva γ está parametrizada por comprimento de arco? Em caso negativo, reparametrize-a por comprimento de arco.

   (d) γ é plana?

   (e) Quando é que uma curva se diz uma hélice generalizada? Nesse caso, o que é o seu eixo?

   (f) Mostre que γ é uma hélice generalizada. Qual é o seu eixo? Solução

2. Diga, justificando convenientemente a sua resposta, quais das seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. (Atenção: resposta sem a devida justificação não será cotada.)

   (a) Em qualquer curva parametrizada por comprimento de arco, $N'(s) = \kappa(s)T(s)+\tau(s)B(s)$.

   (b) O traço de qualquer curva com curvatura constante está contido numa circunferência.

   (c) A identidade $\kappa_s(s) = \theta'(s)$ vale para qualquer curva plana parametrizada por comprimento de arco (onde $\theta(s)$ é a medida do ângulo do vector $(1, 0)$ para $T(s)$, marcado no sentido positivo).

   (d) Todo o difeomorfismo equiareal é uma isometria. Solução

3. (a) Seja $S = f^{-1}(a)$ uma superfície, onde $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação suave e $a \in f(U)$ é um valor regular de f, e seja p um ponto de S. Deduza uma equação para o plano tangente a S em p em termos do gradiente $\nabla_f(p)$ de f em p.

   (b) Seja $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

   (i) Justifique que C é uma superfície.

   (ii) Determine uma equação para o plano tangente a C em $p = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$. Verifique se o ponto $(1, 1, 0)$ pertence à recta normal a C em p. Solução

4. Considere uma superfície de revolução S parametrizada por

$$\begin{array}{rccl} \sigma : &]0,2\pi[\times I & \longrightarrow & S \\ & (u,v) & \longmapsto & (f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v)), \end{array}$$

   onde $f : I \to \mathbb{R}$ é positiva e a geratriz $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ definida por $v \mapsto (f(v), 0, g(v))$ está parametrizada por comprimento de arco.

   (a) Calcule a primeira forma fundamental de σ.

   (b) Determine um campo de vectores normais unitários de S.

   (c) Mostre que S é parte de um cilindro circular ou de um cone circular se e só se todo o ponto de S é parabólico. Solução

Sugestão de resolução

---

1. (a) O vector tangente $T(t)$ é o vector $\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \frac{(2,2\sqrt{3}\,t,3t^2)}{2+3t^2}$ pois $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{4+12t^2+9t^4} = \sqrt{(2+3t^2)^2} = 2+3t^2$.

   (b) $s(t) = \int_0^t \|\gamma'(u)\|\,du = \int_0^t (2+3u^2)\,du = [2u+u^3]_0^t = 2t+t^3$.

   (c) γ não está parametrizada por comprimento de arco pois $\|\gamma'(t)\| = 2+3t^2$ não é a função constante igual a 1. Para reparametrizar γ por comprimento de arco temos que considerar a função bijectiva $s:\mathbb{R}\to s(\mathbb{R})$ definida por $s(t)=2t+t^3$ e determinar a sua função inversa $s^{-1}: s(\mathbb{R})=\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. A reparametrização por comprimento de arco será $\tilde{\gamma}=\gamma\circ s^{-1}$ dada por $\tilde{\gamma}(u) = (2s^{-1}(u), \sqrt{3}s^{-1}(u), (s^{-1}(u))^3)$.

   (d) A curva γ é plana se e só se a sua torsão $\tau(t) = \frac{[\gamma'(t),\gamma''(t),\gamma'''(t)]}{\|\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)\|^2}$ é nula em todos os pontos. Mas $[\gamma'(t),\gamma''(t),\gamma'''(t)] = \Big((2,2\sqrt{3}\,t,3t^2)\wedge(0,2\sqrt{3},6t) \mid (0,0,6)\Big) = \Big((6\sqrt{3}\,t^2,-12t,4\sqrt{3}) \mid (0,0,6)\Big) = 24\sqrt{3} \neq 0$ pelo que γ não é plana.

   (e) Uma curva $\gamma: I\to\mathbb{R}^3$ diz-se uma hélice generalizada quando existe um vector unitário u tal que a função definida por $(T(t)\mid u)$, $t\in I$, é constante. O eixo da hélice é o vector u.

   (f) Como $T(t) = \frac{(2,2\sqrt{3}\,t,3t^2)}{2+3t^2}$, então $(T(t)\mid u)$ é constante se e só se $\frac{1}{2+3t^2}\Big((2,2\sqrt{3}\,t,3t^2)\mid u\Big)$ é constante, ou seja, se e só se $\Big((2,2\sqrt{3}\,t,3t^2)\mid u\Big) = c(2+3t^2)$ para alguma constante c. Mas $\Big((2,2\sqrt{3}\,t,3t^2)\mid(1,0,1)\Big) = 2+3t^2$, logo basta tomar $u = \frac{(1,0,1)}{\|(1,0,1)\|} = (\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2})$.

   Alternativa: Pela caracterização das hélices generalizadas estudada, basta verificar que o quociente

$$\frac{\tau(t)}{\kappa(t)} = \frac{\frac{[\gamma'(t),\gamma''(t),\gamma'''(t)]}{\|\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)\|^2}}{\frac{\|\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}} = \frac{[\gamma'(t),\gamma''(t),\gamma'''(t)]\;\|\gamma'(t)\|^3}{\|\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)\|^3}$$

   é constante, o que é simples:

$$\frac{[\gamma'(t),\gamma''(t),\gamma'''(t)]\;\|\gamma'(t)\|^3}{\|\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)\|^3} = \frac{24\sqrt{3}(2+3t^2)^2}{(2\sqrt{3})^3(2+3t^2)^3} = 1.$$

   Quanto ao cálculo do eixo: sendo $1 = \frac{\tau(t)}{\kappa(t)} = d$ então $u = cT(t)+\sqrt{1-c^2}B(t)$ onde $c = \frac{d}{\sqrt{1+d^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Portanto

$$u = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{(2,2\sqrt{3}\,t,3t^2)}{2+3t^2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{(6\sqrt{3}\,t^2,-12t,4\sqrt{3})}{2\sqrt{3}(2+3t^2)} = \cdots = \Big(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\Big).$$

2. (a) Falsa: Da igualdade $N(s) = B(s)\wedge T(s)$ decorre, por diferenciação,

$$\begin{aligned} N'(s) &= B'(s)\wedge T(s) + B(s)\wedge T'(s) \\ &= -\tau(s)N(s)\wedge T(s) + \kappa(s)B(s)\wedge N(s) \\ &= -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s) \end{aligned}$$

(b) Falsa: qualquer recta ou qualquer hélice circular são contra-exemplos.

(c) Verdadeira: Sejam $u = (1, 0)$ e $v = (0, 1)$. Então

$$T(s) = \cos\theta(s)u + \sin\theta(s)v = (\cos\theta(s), \sin\theta(s))$$

e

$$T'(s) = \theta'(s)(-\sin\theta(s), \cos\theta(s)).$$

Portanto $(T'(s)|u) = -\sin\theta(s)\theta'(s)$. Por outro lado, pela definição de $\kappa_{\mathbf{s}}$, temos $(T'(s)|u) = \kappa_{\mathbf{s}}(s)(N_{\mathbf{s}}(s)|u)$, e como o ângulo entre $N_{\mathbf{s}}(s)$ e u é igual a $\pi/2 + \theta(s)$, $(T'(s)|u) = \kappa_{\mathbf{s}}(s)\cos(\theta(s) + \pi/2) = -\kappa_{\mathbf{s}}(s)\sin\theta(s)$. Em conclusão, $\kappa_{\mathbf{s}}(s) = \theta'(s)$.

(d) Falsa:

Consideremos a *projecção de Arquimedes* $f : P \mapsto Q$, da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (menos os pólos norte e sul) no cilindro $x^2 + y^2 = 1$, definida do seguinte modo: para cada ponto $P \neq (0, 0, \pm 1)$ na esfera, existe uma única recta horizontal que passa por P e pelo eixo OZ; esta recta intersecta o cilindro em dois pontos, um dos quais (que denotamos por Q) está mais perto de P. Pelo Teorema de Arquimedes, provado nas aulas teóricas, f é equiareal, pois para o mapa global σ da esfera (menos os pólos norte e sul), dado pelas coordenadas esféricas, e a sua imagem $f \circ \sigma$ por f, as segundas formas fundamentais satisfazem $E_1G_1 - F_1^2 = E_2G_2 - F_2^2$, e não é uma isometria pois estas duas formas fundamentais não coincidem.

3. (a) Seja S uma superfície do tipo $f^{-1}(a)$ (sendo a um valor regular de $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$). Para cada mapa $\sigma : U' \to W \subseteq S$, $f \circ \sigma$ é constante ($f(\sigma(x)) = a$ para cada $x \in U'$) pelo que

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} = J_f(p) \cdot J_\sigma(q)$$

para cada $p = \sigma(q) \in W$. Consequentemente, como $J_f(p) = \nabla f(p)$,

$$(\nabla f(p) \mid \frac{\partial\sigma}{\partial x}(q)) = 0 \ \text{ e } \ (\nabla f(p) \mid \frac{\partial\sigma}{\partial y}(q)) = 0.$$

Portanto, $\nabla f(p) \in (T_pS)^\perp$ pelo que o plano tangente a S em p, Π_p^S, é o plano que passa por p e é ortogonal a $\nabla f(p)$. Assim,

$$\Pi_p^S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ((x, y, z) - p \mid \nabla f(p)) = 0\}.$$

(b) (i) Consideremos a função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x, y, z) = x^2 + y^2$. Sendo uma função polinomial, é claramente uma função C^∞. Como $C = f^{-1}(\{1\})$, pelo critério *"Seja $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função C^∞. Se $a \in f(U)$ é um valor regular de f então $S = f^{-1}(\{a\})$ é uma superfície."*

bastará verificarmos que 1 é um valor regular de f para concluirmos que C é uma superfície. Verifiquemos então isso:

$\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, 0)$, donde $\nabla f(x, y, z) = (0, 0, 0)$ se e só se $x = y = 0$. Portanto, o gradiente de f anula-se nos pontos $(0, 0, z)$, $z \in \mathbb{R}$. Como nenhum destes pontos pertence a $f^{-1}(\{1\}) = C$, está confirmado que 1 é valor regular de f.

(ii) Pela alínea (a),

$$\Pi_p^C \ = \ \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ((x, y, z) - (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0) \mid \nabla f(p)) = 0\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid ((x-\frac{\sqrt{2}}{2}, y-\frac{\sqrt{2}}{2}, z) \mid (\sqrt{2},\sqrt{2},0)) = 0\} \\
&= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \sqrt{2}x - 1 + \sqrt{2}y - 1 = 0\} \\
&= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x + y = \sqrt{2}\}.
\end{aligned}
$$

A recta normal a C em p tem a direcção de $\nabla f(p) = (\sqrt{2},\sqrt{2},0)$. Portanto, $(1,1,0)$ pertence a esta recta precisamente se existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tal que

$$(1,1,0) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0) + \lambda(\sqrt{2},\sqrt{2},0),$$

o que é o caso, para $\lambda = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

4. (a) Como $\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v) = (-f(v)\sin u, f(v)\cos u, 0)$ e $\frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v) = (f'(v)\cos u, f'(v)\sin u, g'(v))$ então:

$$
\begin{aligned}
E(u,v) &= f(v)^2\sin^2 u + f(v)^2\cos^2 u = f(v)^2, \\
F(u,v) &= -f(v)f'(v)\sin u\cos u + f(v)f'(v)\sin u\cos u = 0, \\
G(u,v) &= f'(v)^2\cos^2 u + f'(v)^2\sin^2 u + g'(v)^2 = f'(v)^2 + g'(v)^2.
\end{aligned}
$$

Mas γ está parametrizada por comprimento de arco, o que significa que $f'(v)^2 + g'(v)^2 = 1$, pelo que $G = 1$. Portanto a primeira forma fundamental de σ é dada pela matriz

$$\begin{bmatrix} f(v)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Como

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v)\wedge\frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v) &= (f(v)g'(v)\cos u, f(v)g'(v)\sin u, -f(v)f'(v)\sin^2 u - f(v)f'(v)\cos^2 u) \\
&= (f(v)g'(v)\cos u, f(v)g'(v)\sin u, -f(v)f'(v))
\end{aligned}
$$

então

$$\|\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v)\wedge\frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v)\| = \sqrt{(f(v)g'(v))^2 + (f(v)g'(v))^2} = \sqrt{f(v)^2(f'(v)^2 + g'(v)^2)} = f(v).$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
N(u,v) &= \frac{\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v)\wedge\frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v)}{\|\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v)\wedge\frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v)\|} = \frac{(f(v)g'(v)\cos u, f(v)g'(v)\sin u, -f(v)f'(v))}{f(v)} \\
&= (g'(v)\cos u, g'(v)\sin u, -f'(v)).
\end{aligned}
$$

(c) Um ponto $p = \sigma(u,v)$ de S é parabólico se e só se $K(p) = 0$ e $H(p) \neq 0$. Para determinar as curvaturas K e H dos pontos de S falta só calcular a segunda forma fundamental de σ:

$$
\begin{aligned}
e(u,v) &= -\Big(\frac{\partial^2\sigma}{\partial u^2} \mid N(u,v)\Big) \\
&= -\Big((-f(v)\cos u, -f(v)\sin u, 0) \mid (g'(v)\cos u, g'(v)\sin u, -f'(v))\Big) = f(v)g'(v),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(u,v) &= -\Big(\frac{\partial^2\sigma}{\partial u\partial v} \mid N(u,v)\Big)\\
&= -\Big((-f'(v)\sin u, f'(v)\cos u, 0) \mid (g'(v)\cos u, g'(v)\sin u, -f'(v))\Big) = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g(u,v) &= -\Big(\frac{\partial^2\sigma}{\partial v^2} \mid N(u,v)\Big)\\
&= -\Big((f''(v)\cos u, f''(v)\sin u, g''(v)) \mid (g'(v)\cos u, g'(v)\sin u, -f'(v))\Big)\\
&= -f''(v)g'(v) + f'(v)g''(v).
\end{aligned}
$$

Então,

$$
\begin{aligned}
K(u,v) &= \frac{e(u,v)g(u,v) - f(u,v)^2}{E(u,v)G(u,v) - F(u,v)^2} = \frac{-f(v)f''(v)g'(v)^2 + f(v)f'(v)g'(v)g''(v)}{f(v)^2}\\
&= \frac{f'(v)g'(v)g''(v) - f''(v)g'(v)^2}{f(v)}.
\end{aligned}
$$

Mas $f'(v)^2 + g'(v)^2 = 1$ implica, por derivação, $2f'(v)f''(v) + 2g'(v)g''(v) = 0$, ou seja,

$$
f'(v)f''(v) = -g'(v)g''(v). \quad (*)
$$

Consequentemente,

$$
K(u,v) = -\frac{f'(v)^2 f''(v) + f''(v)g'(v)^2}{f(v)} = -\frac{f''(v)(f'(v)^2 + g'(v)^2)}{f(v)} = -\frac{f''(v)}{f(v)}.
$$

Portanto, $K(p) = 0$ em todos os pontos p de S se e só se $f''(v) = 0$ para qualquer $v \in I$, o que é ainda equivalente, por $(*)$, a $g''(v) = 0$ para todo o $v \in I$. Logo, $K(p) = 0$ em todos os pontos de S se e só se existem constantes reais a, b, c, d tais que $f(v) = av+b > 0$ e $g(v) = cv + d$ para qualquer $v \in I$. Nesse caso temos

$$
\begin{aligned}
H(u,v) &= \frac{E(u,v)g(u,v) - 2f(u,v)F(u,v) + G(u,v)e(u,v)}{2(E(u,v)G(u,v) - F(u,v)^2)}\\
&= \frac{-f(v)^2 f''(v)g'(v) + f(v)^2 f'(v)g''(v) + f(v)g'(v)}{2f(v)^2} = \frac{g'(v)}{2f(v)}.
\end{aligned}
$$

Assim, quando $K(p)$ é sempre zero, $H(p) \neq 0$ se e só se $g'(v) \neq 0$. Portanto, todo o ponto de S é parabólico se e só se $f(v) = av + b$ e $g(v) = cv + d$ com $g'(v) = c \neq 0$.

Concluindo:

- Se todo o ponto de S é parabólico, a geratriz γ é dada por $\gamma(v) = (av + b, 0, cv + d)$ com $c \neq 0$. Se $a = 0$, γ está contida numa recta vertical e S será então (parte de) um cilindro circular vertical. Se $a \neq 0$, γ está contida numa recta que não é vertical nem horizontal (pois $c \neq 0$). Neste caso, S é claramente (parte de) um cone circular.
- Reciprocamente, se S é parte de um cilindro ou cone circulares, então a geratriz terá que ser uma recta não horizontal, ou seja, da forma $(v, 0, \alpha v + \beta)$ com $\alpha \neq 0$. É claro que então $K(u,v) = -\frac{f''(v)}{f(v)} = 0$ e $H(u,v) = \frac{g'(v)}{2f(v)} = \frac{\alpha}{2f(v)} \neq 0$, pelo que todo o ponto de S é parabólico.